N° D'ORDRE : 271

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences

de l'Université de Lyon

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Lucien MARTEL

1re THÈSE : Étude statistique de la courbe de lumière de l'étoile variable SS Cygni.

2e THÈSE : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 18 DEC 1961 devant la Commission d'examen.

MM. DUFAY *Président.*
EYRAUD, MALECOT } *Examinateurs.*
SCHATZMAN *Adjoint au jury.*

SERVICE DES PUBLICATIONS DU C. N. R. S.
13, Quai Anatole-France
PARIS 7e

N° D'ORDRE : 271

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences

de l'Université de Lyon

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Lucien MARTEL

1re THÈSE : Étude statistique de la courbe de lumière de l'étoile variable SS Cygni.

2e THÈSE : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 18 DEC 1961 devant la Commission d'examen :

MM. DUFAY *Président.*
EYRAUD, MALECOT *Examinateurs.*
SCHATZMAN *Adjoint au Jury.*

SERVICE DES PUBLICATIONS DU C. N. R. S.
13, Quai Anatole-France
PARIS 7e

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

Doyens honoraires

MM. Longchambon, Douin, Moussa.

Professeurs honoraires

MM. Locquin, De Larambergue, Doeuvre, Sollaud, Mentzer, Moussa.

Doyen

M. H. Gauthier

Assesseur

M. Braconnier.

Professeurs

MM.	Longchambon	Minéralogie.
	Dejardin	Physique générale.
	Douin	Botanique.
	Eyraud H.	Calcul différentiel et intégral.
	Courty	Chimie-Physique.
	Prettre	Chimie industrielle.
	Kuhner	Microbiologie et Mycologie.
	Malecot	Mécanique rationnelle et appliquée.
	Paris	Chimie minérale.
	Aumeras	Chimie.
	Colonge	Chimie organique.
	Flandrin	Géologie appliquée.
	Janin	Physique expérimentale
	Bernard	Physique industrielle.
	Dufay J.	Astronomie.
	Nigon	Zoologie expérimentale.
	Gauthier H.	Géologie.
	Viret	Géologie.
	Wautier	Zoologie.
	Chopin	Chimie biologique.
	Cueilleron	Chimie.
	Braconnier	Mathématiques.
	Eyraud Ch.	Chimie physique appliquée.
	Jaffard	Méthodes mathématiques de la Physique.
	Sarazin	Physique nucléaire.
	Boidin	Botanique.

Professeurs sans chaire

MM.	Boutillier	Minéralogie.
	Mesnard	Physique.
	Dreux	Chimie organique.
	Grandmontagne	Physique.
	Lafoucrière	Physique nucléaire.

Maîtres de conférences

MM.	Teichner	Chimie industrielle.
	Depraz	Physique nucléaire.
	Feron	Mathématiques.
	Gaume	Physique.
	Merlin	Chimie M. P. C.
	Pacheco	Chimie biologique.
	Pavans de Ceccatty	Zoologie.
	Philbert	Physique nucléaire.
	Bersillon	Physiologie végétale S. P. C. N.
	David L.	Géologie.
	Gauthier J.	Chimie.
	Laforgue	Physique.
	Legay	Zoologie expérimentale S. P. C. N.
	Peres	Physiologie.
	Uzan	Physique S. P. C. N.
	Chenevoy	Géologie appliquée.
Mlle	Maitrot	Physique.
	Chanel	Psychophysiologie.
	Asch	Physique.
	Dufay M.	Physique.
	Ginet	Zoologie.
	Maury	Mathématiques.
	Michel	Minéralogie.
Mme	Ericson	Physique générale.

Maîtres de conférences adjoints

MM.	Pierron	Chimie.
	Lemonde	Physique.

Secrétaire principal honoraire

M. Roux.

Secrétaire principal

M. Burnet.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

ÉTUDE STATISTIQUE DE LA COURBE DE LUMIÈRE DE L'ÉTOILE VARIABLE SS CYGNI

par L. Martel

Sommaire. — *On rappelle tout d'abord la nature et l'origine des données d'observation, on définit les grandeurs caractéristiques de la courbe de lumière et l'on procède à un examen critique de certaines d'entre elles. On applique ensuite à celles-ci les méthodes de l'analyse statistique en vue d'établir les lois théoriques des distributions de fréquence, d'étudier les corrélations existant entre ces différentes grandeurs, et de tester l'existence d'organisations au sein des séries chronologiques qu'elles constituent. On procède enfin à un essai d'interprétation des résultats obtenus au moyen d'une théorie physique du phénomène* (Schatzman, 1960).

Abstract. — *First of all the nature and origin of the observational data are recalled, the parameters of the light curve defined, and some of them are subjected to critical examination. Next, the methods of statistical analysis are applied so as to establish the theoretical frequency distribution laws, study the correlations existing between the various parameters, and test for the existence of patterns in the midst of the chronological sequences that they constitute. Finally, an interpretation of the obtained results is attempted, by means of a physical theory of the phenomenon* (Schatzman, 1960).

Статистическое исследование кривой яркости переменной звезды SS Cygni

Резюме. — Прежде всего напоминается о природе и происхождении данных наблюления, определяются параметры кривой яркости и производится критическая проверка некоторых из них. Затем к ним применяются методы статистического анализа с целью установления теоретических законов распределения частоты, изучения зависимостей, существующих между различными параметрами, и выработки тестов существования организаций внутри хронологических серий, которые они образуют. В заключение делается попытка интерпретации полученных результатов при помощи физической теории явления (Шацман-1960).

Introduction

Suivant la classification d'étoiles variables établie par Payne et Gaposchkin [1], SS Cygni appartient à la classe des variables cataclysmiques, et constitue le type de l'un des groupes de cette classe. D'autres auteurs retiennent U Geminorum comme modèle de ce groupe : ces deux étoiles présentent en effet de nombreuses caractéristiques semblables et ont fait toutes deux l'objet de très nombreuses observations.

Les étoiles du type SS Cygni forment un groupe bien défini d'étoiles variables. Leur éclat reste relativement stable, à une valeur minimum, pendant une durée allant de 20 à 100 jours environ, pour augmenter ensuite de façon généralement rapide ; après être resté au maximum pendant quelques jours, l'éclat décroît graduellement jusqu'au minimum, cette décroissance étant habituellement moins rapide que son augmentation.

La variation d'éclat de SS Cygni fut découverte par Miss Wells en 1896, et, depuis cette date, cette étoile a fait l'objet d'observations ininterrompues de la part des observateurs d'étoiles variables. Les données ainsi recueillies constituent par leur continuité un matériel statistique extrêmement utile, et dont l'étude permet d'établir certaines propriétés que l'on ne pourrait déduire d'observations fragmentaires si précises soient-elles.

Le but essentiel de ce travail est l'application de l'analyse statistique à la série des diverses grandeurs caractérisant la courbe de lumière de SS Cygni.

La première partie rappelle l'origine des données utilisées et en fait la critique.

La deuxième partie rassemble l'étude statistique des grandeurs caractéristiques de la courbe de lumière :

— distribution des largeurs, des natures, des magnitudes et des types de maxima ;

— relations entre ces diverses grandeurs ;
— relations entre éléments de maxima consécutifs ;
— distribution des largeurs de minima ;
— recherche des organisations dans les séries chronologiques de certaines grandeurs caractéristiques de la courbe de lumière.

La troisième partie résume les études statistiques antérieures, et tente de raccorder les résultats obtenus à une théorie récente du phénomène.

PREMIÈRE PARTIE

DONNÉES D'OBSERVATION

I. Nature des données

Les observations de SS Cygni, faites dans leur généralité par des amateurs, portent uniquement sur l'évaluation de la magnitude visuelle. Ces données sont en nombre suffisant pour permettre un tracé de la courbe de lumière ne comportant que de rares discontinuités.

Cette courbe de lumière a fait l'objet d'une description très détaillée par Campbell [2], [3], et je me bornerai à en rappeler les caractéristiques essentielles :

— le minimum d'éclat se situe entre 11,5 et 12,0 mag. ; on peut observer occasionnellement des fluctuations portant cet éclat entre 11 et 10 mag. Des fluctuations plus faibles, non observables visuellement, ont pu cependant être mises en évidence au moyen d'observations photoélectriques [4] ;

— le maximum d'éclat n'excède pas 8,0 mag., il est habituellement voisin de 8,5 mag., mais peut prendre parfois des valeurs voisines de 10,0 mag., ce qui soulève quelques difficultés dans le dénombrement des maxima.

Sans vouloir préjuger de la nature du phénomène, convenons d'appeler « explosion » l'augmentation d'éclat qui a lieu à intervalles irréguliers ; le début d'une explosion se traduit par une augmentation rapide de l'éclat, si bien qu'il est difficile (sinon impossible lorsque les observations font défaut) de déterminer avec une précision suffisante la date de début du phénomène. A la fin de l'explosion, la courbe de lumière affecte une forme adoucie et ici également il est impossible de fixer une date précise pour le retour de l'étoile à son éclat minimum.

C'est pour éliminer cette difficulté que Campbell [2] convient de retenir les dates du passage de l'éclat à la magnitude 10,0 (fig. 1). A partir de celles-ci, il définit la largeur d'un maximum comme l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs de l'éclat à la magnitude 10,0 lors d'une explosion (intervalle *ab*). De même, la largeur d'un minimum est l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs de l'éclat à la magnitude 10,0 entre deux explosions (intervalle *bc*). Ce sont les grandeurs ainsi définies que j'utiliserai au cours de cette étude.

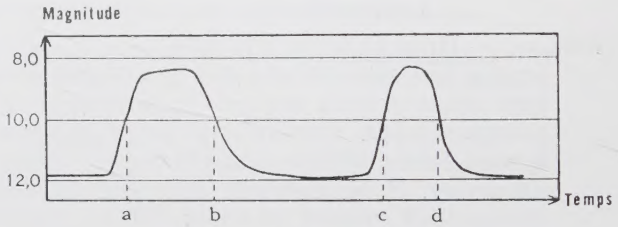


Fig. 1.

Elles présentent les caractéristiques suivantes :

— les largeurs de maxima sont comprises entre les valeurs extrêmes de 2 et 22 jours, et présentent deux valeurs modales vers 8 et 15 jours. Les maxima semblent ainsi appartenir à deux classes : maxima « étroits », de largeur inférieure ou égale à 11 jours, maxima « larges », de largeur supérieure ou égale à 12 jours ;

— les largeurs de minima sont comprises entre les valeurs extrêmes de 16 et 95 jours, avec une valeur moyenne de 41 jours environ ;

— Campbell a établi une classification des maxima, suivant la forme de la courbe de lumière, en 4 types : A, B, C, D, eux-mêmes divisés en sous-types. Cette classification repose sur la rapidité de croissance de l'éclat et sur la largeur du maximum : la rapidité de croissance diminue des types A à D, tandis que les indices désignant les sous-types sont liés à la largeur du maximum considéré. Cependant, on trouve toutes les formes intermédiaires entre

chaque type, si bien qu'une telle classification apparaît parfois bien subjective.

En définitive, les courbes de lumière tracées à partir des observations visuelles de magnitude permettent de déterminer les éléments suivants :

— dates de passage à la mag., 10,0 ;
— largeurs des maxima ;
— largeurs des minima ;
— magnitude des maxima ;
— magnitude moyenne des minima [1] ;
— type et sous-type des maxima.

Les maxima sont numérotés dans leur ordre chronologique, le premier maximum observé, du 11 au 21 octobre 1896, ayant reçu le numéro zéro.

II. Origine des données

J'ai pu rassembler les données relatives à tous les maxima depuis l'origine jusqu'au maximum 440 inclus, ce dernier ayant eu lieu du 27 novembre au 7 décembre 1958.

L'origine des données que j'ai utilisées est indiquée ci-après :

Numéro des maxima	Origine des données
0 à 267	Campbell, The light curve of SS Cygni, *HA*, **90**, n° 3.
268 à 269	HC, n° 395
270 à 276	HC, n° 407
277 à 281	HC, n° 415
282 à 289	HC, n° 427
290 à 312	M. Mayall, Communication privée. (Ces maxima n'auraient fait l'objet d'aucune publication).
313 à 318	HR, n° 231, p. 9
319 à 324	HR, n° 250, p. 14
325 à 329	HR, n° 259, p. 19
330 à 346	HR, n° 277, p. 19
347 à 355	HR, n° 300, p. 8
356 à 362	HR, n° 316, p. 6
363 à 369	HR, n° 327, p. 9
370 à 375	HR, n° 339, p. 6
376 à 381	HR, n° 356, p. 9
382 à 387	JRASC, vol. 46, n° 4, p. 152
388 à 394	» » 47, n° 3, p. 118
395 à 402	» » 48, n° 2, p. 71
403 à 409	» » 49, n° 3, p. 120
410 à 417	» » 50, n° 4, p. 178
418 à 425	» » 51, n° 3, p. 220
426 à 434	» » 52, n° 3, p. 138
435 à 440	» » 53, n° 3, p. 146

Les références indiquées ci-dessus correspondent aux publications contenant les éléments définis précédemment. Ayant été élaborés à partir des données d'observation par la même personne (ou la même équipe) des A. A. V. S. O., appliquant des méthodes identiques, leur série présente donc toute garantie d'homogénéité.

III. Précision des observations. Critique des données

1) *Nombre des maxima.*

Les observations effectuées par les membres des diverses associations d'observateurs d'étoiles variables (États-Unis d'Amérique, France, Danemark, Italie, Grèce, etc...), sont centralisées par l'A. A. V. S. O. (American Association of Variable Stars Observers) depuis la fin de la deuxième guerre mondiale. Cette organisation permet de rassembler un nombre considérable d'observations (de 1500 à 2000 en moyenne par an) si bien qu'aucun maximum n'a pu passer inaperçu depuis 1945 environ.

De la découverte de la variabilité de l'étoile en 1896, jusqu'au maximum 323 en 1941, celle-ci a fait l'objet de 56.900 observations, réparties sur 13.312 nuits, représentant 81 % de l'ensemble des nuits. En 1949, ce nombre s'élève à 90.000, représentant une moyenne de 300 nuits d'observation par an. « Il est très certain que tous les maxima, sauf un, ont été observés en totalité ou partiellement » [5]. Ce maximum (portant le numéro 319), passé inaperçu aux observateurs de l'A. A. V. S. O., a en fait été observé en Allemagne et au Danemark, si bien qu'il a été possible de rétablir les données qui le concernent.

Un autre maximum (numéro 435) n'a pu être observé sur la partie croissante de la courbe de lumière.

La distribution de fréquence des largeurs de minima met en évidence 6 d'entre eux dont les largeurs semblent anormalement élevées. J'ai vérifié en me reportant aux observations journalières qu'aucun maximum n'avait pu vraisemblablement passer inaperçu. Ces minima anormalement larges sont les suivants :

— Minimum suivant le maximum 254 ; largeur : 89 jours ;

1. La magnitude moyenne des minima n'a plus été évaluée au delà du 276e maximum.

Plusieurs observations quotidiennes, toutes supérieures à 11,0 mag. Pas de lacunes supérieures à 2 nuits consécutives ;

— Minimum suivant le maximum 268 ; largeur : 90 jours.

Plusieurs observations quotidiennes, un maximum secondaire supprimé, car excédant la mag. 10,0 (voir ci-dessous).

Pas de lacunes supérieures à 2 nuits consécutives.

— Minimum suivant le maximum 332 ; largeur : 94 jours.

Pas d'observations entre les J. J. : 2430860,8 (11,7 mag.) et 2430869,6 (11,8 mag.). Or, le maximum 332 s'est terminé au J. J. : 2430857 (date de passage de l'éclat à la magnitude 10,0). Si un maximum avait eu lieu au cours des 7 jours où les observations font défaut, la durée du minimum entre celui-ci et le maximum 332 serait de l'ordre de 8 jours. Or, sur les 436 minima observés, le plus court est de 16 jours. Il est donc très peu probable qu'un maximum ait pu se produire au cours de la période de non-observation.

— Minimum suivant le maximum 334 ; largeur : 91 jours.

Plusieurs observations quotidiennes. Pas de lacunes supérieures à 2 nuits consécutives.

— Minimum suivant le maximum 350 ; largeur : 90 jours.

Un maximum secondaire supprimé (voir ci-dessous).

On relève des lacunes de 4, 3, 8, 3, 4, 4, 6 et 4 jours, mais les observations encadrant ces périodes sont toutes supérieures à 11,0 mag. Il est donc peu vraisemblable — sans que l'on puisse l'assurer avec certitude — qu'un maximum ait échappé à l'observation au cours de cette période de 91 jours.

— Minimum suivant le maximum 367 ; largeur : 95 jours.

Aucune lacune dans les observations n'est supérieure à 2 nuits consécutives.

Ainsi, l'on peut être assuré, avec une quasi certitude, que tous les maxima de SS Cygni depuis le début des observations ont été au moins partiellement observés.

2) *Précision des mesures.*

Bien que l'éclat de l'étoile soit mesuré par les observateurs au dixième de magnitude près, l'ordre de grandeur de l'erreur commise dans cette estimation est probablement de l'ordre de 0,5 magnitude. La figure 2 représente l'ensemble des observations reçues par l'A. A. V. S. O. [6] lors du maximum 295 : le pointage de celles-ci met bien en évidence la dispersion notable des résultats. Si, dans ce cas, la densité des mesures permet le tracé de la courbe de lumière avec une bonne précision, il n'en est plus de même lorsque l'on dispose d'un nombre plus faible de données.

Il est donc illusoire de vouloir apprécier au

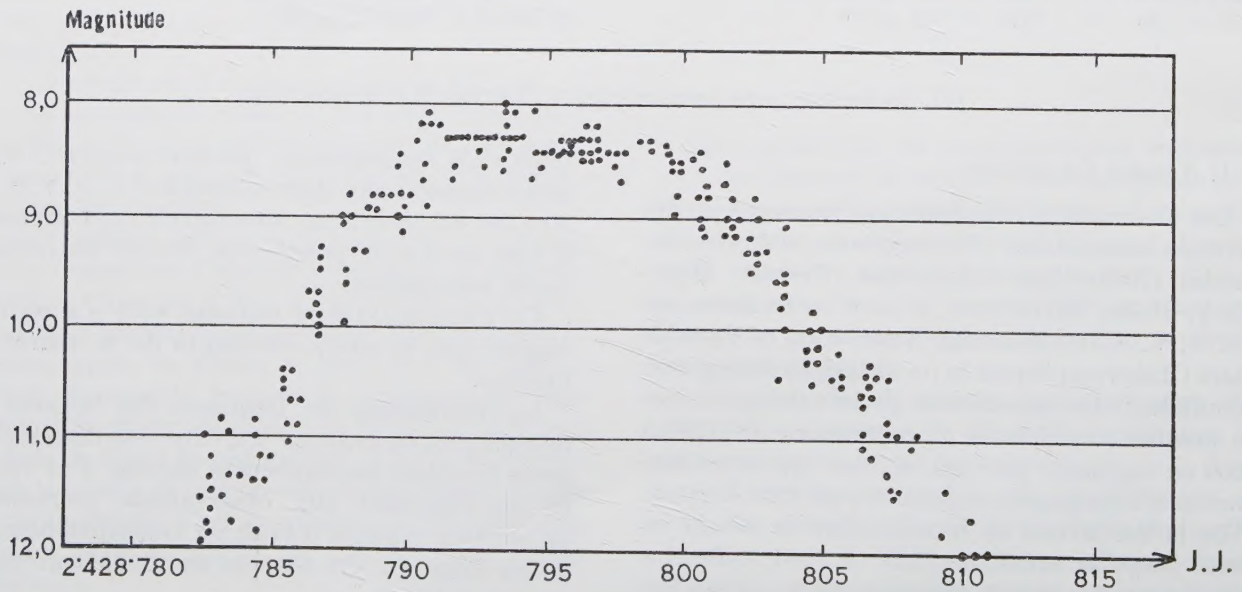


Fig. 2. — Observations effectuées lors du maximum 295.

dixième de jour près les dates du passage de l'éclat à la magnitude 10,0 : j'ai arrondi au jour entier le plus proche ces valeurs lorsqu'elles étaient évaluées en dixièmes de jours (notamment pour les maxima antérieurs au nº 268).

Il est également vain d'espérer retirer une informa-

tion de l'analyse précise des magnitudes des maxima : les variations effectives de celles-ci ne sont vraisemblablement pas observables à travers les fluctuations aléatoires dûes aux erreurs de mesure.

Ces fluctuations apparaissent encore plus importantes lorsque l'étoile est au minimum d'éclat : l'appréciation sans instrument assez puissant (télescope de 20 cm par exemple) d'un éclat voisin de la magnitude 12,0 est nécessairement entachée d'une erreur de mesure notable (fig. 3).

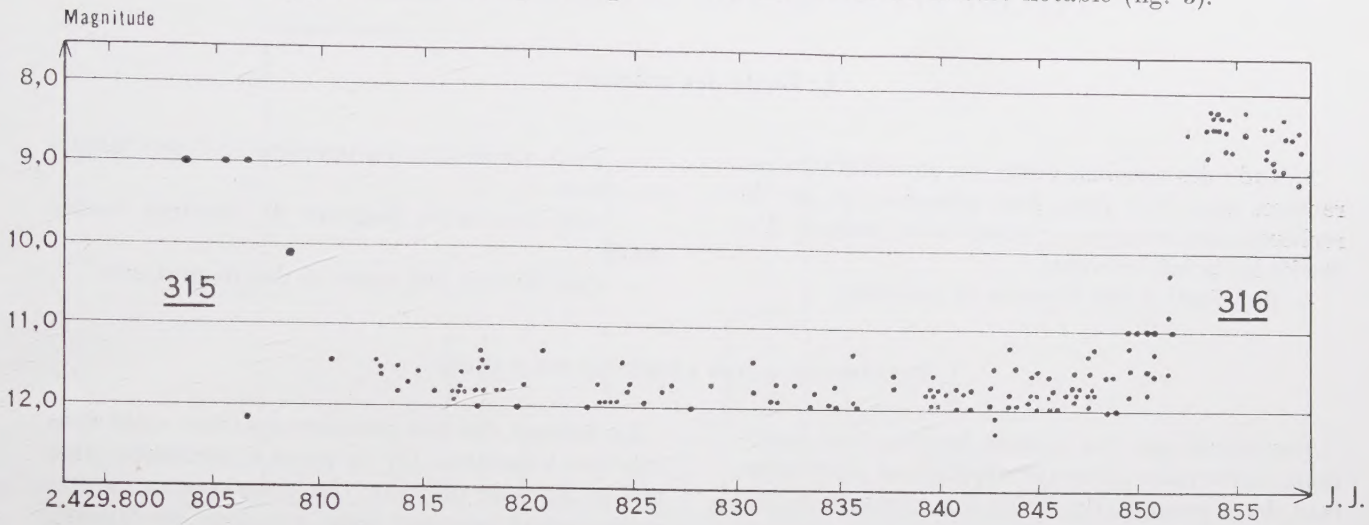


FIG. 3. — Observations effectuées au cours du minimum compris entre les maxima 315 et 316.

3) *Critique des données.*

D'après la définition donnée par CAMPBELL, on a convenu de retenir comme un maximum toute augmentation d'éclat telle que celui-ci devienne inférieur à la magnitude 10,0.

Lors des maxima « normaux », l'éclat atteint généralement une valeur inférieure à la magnitude 9,0 ; il n'y a donc aucune incertitude dans la détermination de ceux-ci.

On observe par contre des maxima « secondaires », qui se produisent immédiatement après un maximum « normal ».

Il convient donc de décider si un tel maximum secondaire doit être considéré comme un sursaut de l'étoile au cours de la phase terminale de l'explosion — et dans ce cas rejeter celui-ci —, ou bien s'il correspond à une explosion indépendante de la précédente.

L'éclat atteint par ces maxima secondaires étant voisin de la magnitude 10,0, j'ai examiné individuellement tous les maxima dont la magnitude exède 9,0, soit au total 32 maxima.

Pour certains d'entre eux, la simple lecture des données brutes d'observation montre que la magnitude des minima adjacents est comprise entre 11,5 et 12,0 ; ces maxima, apparaissant ainsi nettement distincts des maxima adjacents, peuvent donc être considérés avec certitude comme des maxima « normaux ».

La discrimination est plus délicate pour un petit nombre d'entre eux, et je n'ai pu définir un critère de décision satisfaisant. L'annexe I contient l'étude individuelle de ces cas, et les considérations qui m'ont conduit à l'acceptation ou au rejet du maximum considéré.

Au total, 4 maxima ont été considérés comme « secondaires », et supprimés de la série.

En outre, il a été nécessaire de reconstituer les éléments de 5 maxima pour lesquels les observations faisaient partiellement défaut (maxima nº 319, 326, 396, 404, 435). Le détail de ces reconstitutions est indiqué en Annexe I.

On eût pu abandonner ces maxima sans pour autant diminuer de façon sensible le nombre de termes de la série soumise à l'analyse statistique ; mais, précisément en raison du petit nombre de valeurs reconstituées, les résultats ne peuvent pas être affectés de manière appréciable par l'introduction de données peut-être douteuses. Par contre, les calculs se trouvent notablement simplifiés s'ils portent sur une série ne présentant aucune discontinuité. C'est la raison pour laquelle, malgré le manque de bases valables pour procéder aux estimations des données manquantes, j'ai introduitdes valeurs reconstituées dans la série des données utilisées.

En définitive, l'étude statistique porte sur 437 *maxima consécutifs*. Pour éviter toute confusion, j'ai conservé la numérotation attribuée à ceux-ci par l'A. A. V. S. O. : cette série comprend donc les maxima numérotés 0 à 440, les numéros 88, 269, 300 et 351 n'y figurant plus.

DEUXIÈME PARTIE

ANALYSE STATISTIQUE DE LA COURBE DE LUMIÈRE

A. Étude des maxima.

L'étude des maxima porte sur les différents caractères que l'on peut leur attacher, et sur la recherche des relations existant entre ceux-ci. J'ai étudié les points suivants :

— distribution des largeurs de maxima ;

— loi de succession des maxima du type « large » et « étroit » ;

— relations entre largeurs de maxima consécutifs ;

— distribution des types et des magnitudes.

I. Distribution des largeurs de maxima

Rappelons que l'on appelle largeur d'un maximum l'intervalle de temps exprimé en jours séparant deux passages de l'éclat à la magnitude 10,0 lors d'une explosion.

L'histogramme des largeurs de maxima (fig. 4) met en évidence le caractère hétérogène de l'échantillon examiné : celui-ci semble constitué par mélange de deux échantillons à distributions légèrement dissymétriques unimodales, de valeurs modales voisines de 8 et 15 jours.

La largeur des 266 premiers maxima a été évaluée par Campbell [2] en jours et dixièmes. Bien que le degré de précision des observations ne permette pas de mesurer cette grandeur au dixième de jour près, j'ai construit l'histogramme de ces 266 premiers maxima en groupant les données par classes d'amplitude 1, de valeurs centrales 3,5, 4,5 .... 20,5 (fig. 5). On remarque que la classe de valeur centrale 11,5 ne contient que 2 maxima alors que l'effectif des 2 classes voisines est de 7.

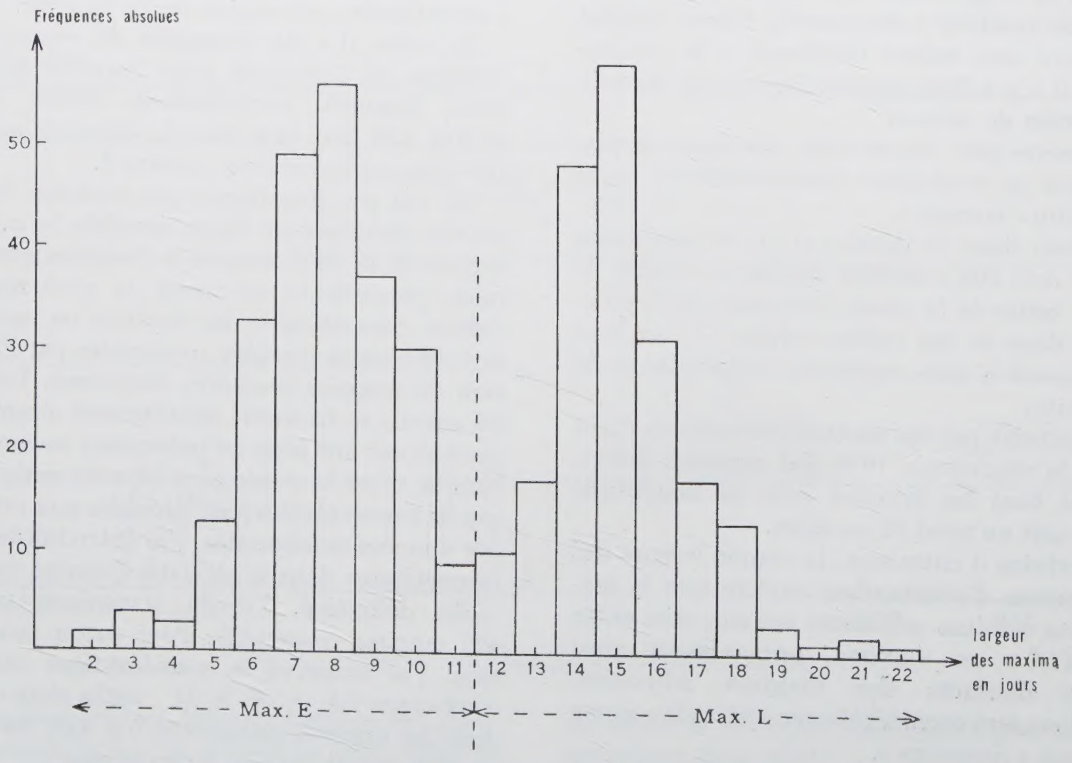


Fig. 4. — Histogramme des largeurs de maxima Ensemble des données : N = 437.

On peut donc admettre, en première approximation, que les maxima observés appartiennent, en ce qui concerne leur largeur, à deux classes distinctes dont la limite est située à 11,5 jours. Tout maximum de largeur inférieure à 11,5 jours sera appelé *maximum étroit* (Max. E), tout maximum de largeur supérieure à 11,5 sera appelé *maximum large* (Max. L).

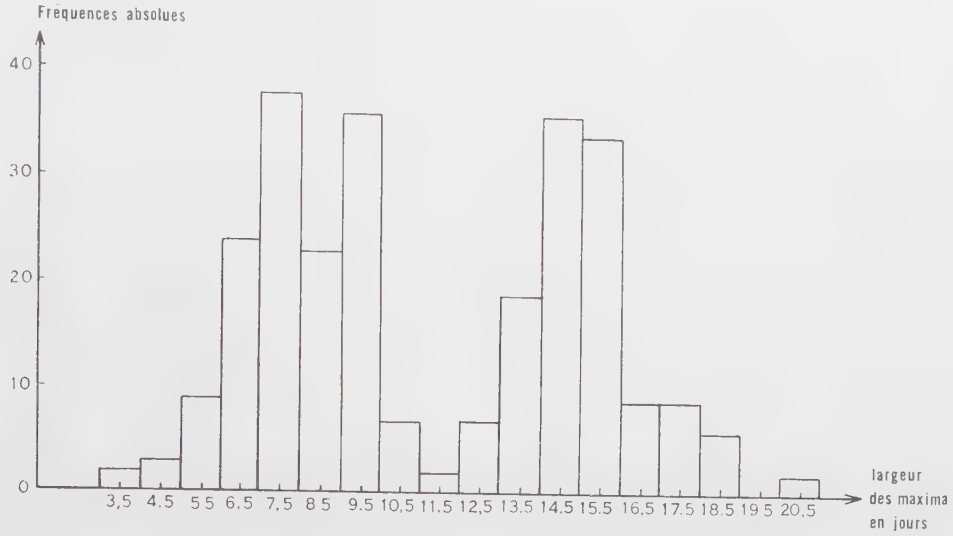


FIG. 5. — Histogramme des largeurs des 266 premiers maxima.

En réalité, le phénomène est probablement plus complexe, et il est vraisemblable qu'il existe une certaine interpénétration des 2 classes : quelques Max. E peuvent excéder 11,5 jours, quelques Max. L être inférieurs à 11,5 jours. Toutefois, l'erreur sur la répartition entre Max. E et Max. L introduite en fixant d'une façon absolue la limite des 2 classes à cette valeur ne porte tout au plus que sur une dizaine de maxima sur l'ensemble de la série utilisée ; par ailleurs, un critère de répartition plus proche de la réalité du phénomène devrait, pour demeurer objectif, tenir compte de certaines propriétés (loi de succession des Max. E et Max. L en particulier) que l'on se propose précisément d'établir.

C'est pourquoi j'ai adopté pour la suite de cette étude la valeur de 11,5 jours pour limite absolue entre les deux classes. Ce critère conduit à la répartition suivante des 437 maxima :

$$n_E = 236 \text{ Max E},$$
$$n_L = 201 \text{ Max L}.$$

Il apparaît immédiatement que les distributions des largeurs de Max. E et Max L (fig. 4) ne peuvent être correctement ajustées par une loi normale : l'intervalle de variation de la variable (largeur des maxima) est borné dans chaque classe par la valeur 11,5 qu'elle atteint avec une fréquence non nulle ; d'autre part, l'histogramme fait apparaître une légère dissymétrie des répartitions de fréquence des largeurs de Max. E et Max L par rapport à leurs valeurs modales respectives.

On désignera dans ce qui suit par :

M_E la largeur des Max E,

M_L la largeur des Max L.

Les moyennes et écarts-types de M_E et M_L ont les valeurs suivantes :

Max E : $n_E = 236$	*Max L* : $n_L = 201$
$\overline{M_E} = 7{,}69$	$\overline{M_L} = 15{,}14$
$\sigma(M_E) = 1{,}76$	$\sigma(M_L) = 1{,}75$

On peut noter que les histogrammes de M_E et M_L semblent grossièrement symétriques par rapport à la droite d'abscisse 11,5. Les moyennes de chaque distribution sont sensiblement symétriques par rapport à cette valeur :

$$\frac{\overline{M_E} + \overline{M_E}}{2} = 11{,}42,$$

et il est clair que les variances ne sont pas significativement différentes.

Cette remarque conduit à effectuer le changement de variables :

$$x_E = 11{,}5 - M_E,$$
$$x_L = M_L - 11{,}5.$$

Les caractéristiques des nouvelles variables sont :
— moyennes :

$$x_E = 3{,}81,$$
$$x_L = 3{,}64,$$

— écarts-types :

$$\sigma(x_E) = 1{,}76,$$
$$\sigma(x_L) = 1{,}75.$$

Les intervalles de confiance à 95 % des moyennes sont les suivants :

$$3{,}58 \leqslant \overline{x_E} \leqslant 4{,}04,$$
$$3{,}39 \leqslant \overline{x_L} \leqslant 3{,}89.$$

Les moyennes $\overline{x_E}$ et $\overline{x_L}$ ne sont donc pas significativement différentes.

Le tableau I donne la distribution des largeurs de maxima.

TABLEAU I

Valeurs centrales de classes			Fréquences absolues			Fréquences relatives		
M_{Ei}	M_{Li}	$x_{Ei} = x_{Li}$	n_{Ei}	n_{Li}	$n_i = n_{Ei} + n_{Li}$	$f_{Ei} = \frac{n_{Ei}}{n_E}$	$f_{Li} = \frac{n_{Li}}{n_L}$	$f_i = \frac{n_i}{N}$
11	12	0,5	9	10	19	0,038	0,050	0,043
10	13	1,5	30	17	47	0,127	0,084	0,108
9	14	2,5	37	48	85	0,157	0,240	0,195
8	15	3,5	56	58	114	0,238	0,286	0,260
7	16	4,5	49	31	80	0,207	0,155	0,183
6	17	5,5	33	17	50	0,140	0,085	0,115
5	18	6,5	13	13	26	0,055	0,065	0,059
4	19	7,5	3	3	6	0,013	0,015	0,014
3	20	8,5	4	1	5	0,015	0,005	0,012
2	21	9,5	2	2	4	0,010	0,010	0,009
1	22	10,5	—	1	1	—	0,005	0,002
			$n_E = 236$	$n_L = 201$	$N = 437$	1,000	1,000	1,000

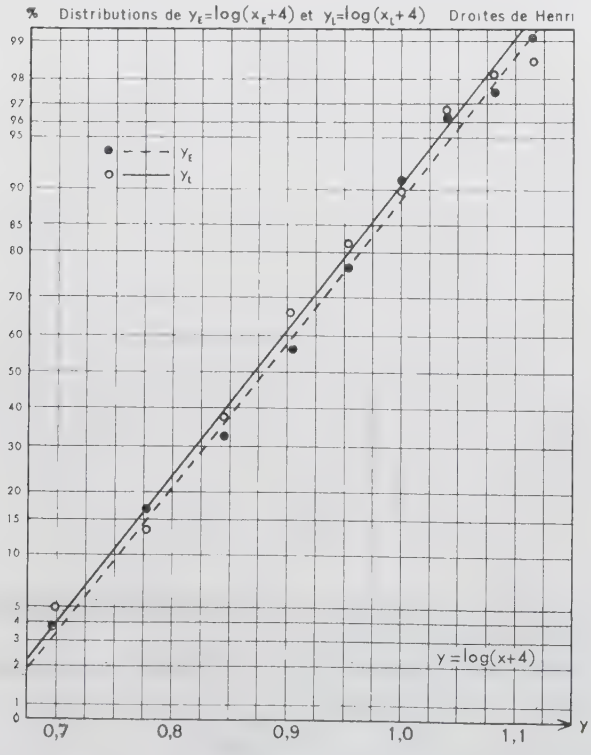


Fig. 6. — Distributions de $y_E = \log(x_E + 4)$ et $y_L = \log(x_L + 4)$. Droites de Henri.

Les échantillons constitués par les $n_E = 236$ valeurs de x_E et $n_L = 201$ valeurs de x_L peuvent être correctement ajustés au moyen d'une loi de Galton.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Galton si la variable auxiliaire $Y = \log(X - x_0)$ suit une loi normale. La constante x_0 est déterminée graphiquement avec assez peu de précision ; cela ne tire pas à conséquence, car une assez forte variation de x_0 est sans influence importante sur la valeur de l'ajustement.

Effectuons les changements de variables :

$$y_E = \log(x_E - x_0) \quad \text{et} \quad y_L = \log(x_L - x_0').$$

Les valeurs des constantes x_0 et x_0' rendant les variables y_E et y_L gaussiennes se déterminent graphiquement au moyen de la droite de Henri. On trouve :

$$x_0 = x_0' = -4.$$

La figure 6 représente le tracé des droites de Henri pour ces valeurs des constantes : elles permettent de constater que les points sont correctement alignés.

Un test en χ^2 de la valeur de ces ajustements conduit aux résultats suivants :

— pour y_E : $\chi_0^2 = 6{,}5$ avec $\nu = 5$ degrés de liberté ;
d'où

$$Pr[\chi^2 > \chi_0^2] = 0{,}28 ;$$

— pour y_L : $\chi_0^2 = 7{,}9$ avec $\nu = 5$ degrés de liberté ;
d'où

$$Pr[\chi^2 > \chi_0^2] = 0{,}19.$$

On sait que :

$$\chi_0^2 = \sum_i \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}.$$

n_i et n'_i étant respectivement les fréquences absolues observées et théoriques relatives à la valeur y_i de la variable. Les fréquences n_i ont été déterminées graphiquement d'après les droites de Henri. A cet effet, celles-ci n'ont pas été tracées à l'estime, mais en fonction des paramètres $\bar{y}$ et $\sigma(y)$ qui fixent leur position.

Le résultat des tests en χ^2 de l'ajustement des distributions de y_E et y_L ne conduit pas à rejeter l'hypothèse d'une distribution de Galton ; on peut donc considérer celle-ci comme vraisemblable.

Les variables x_E et x_L suivent ainsi la même loi de distribution ; on a vu qu'elles avaient même moyenne et même écart-type. Peut-on admettre que les échantillons dont on dispose aient été extraits d'une population unique ? Un test d'homogénéité permet de vérifier cette hypothèse. On calcule pour cela l'expression :

$$\chi_0^2 = n_E . n_L \sum_i \frac{\left(\frac{n_{E_i}}{n_E} - \frac{n_{L_i}}{n_L}\right)^2}{n_{E_i} + n_{L_i}} = 11{,}7,$$

avec $\nu = 7$ degrés de liberté ;
d'où

$$Pr[\chi^2 > \chi_0^2] = 0{,}13.$$

Ce résultat ne permet donc pas de rejeter une telle hypothèse. On est ainsi fondé à fusionner les deux échantillons de x_E et x_L en un échantillon unique de la variable x, échantillon dont la distribution figure dans le tableau I (fréquence absolue n_i, relative f_i).

La distribution des valeurs de x est également correctement ajustée par une loi de Galton.

Posons :

$$y = \log (x + 4).$$

La variable y est distribuée suivant une loi normale comme on peut le vérifier par la droite de Henri correspondante (fig. 7).

Le test en χ^2 de la valeur de cet ajustement conduit au résultat suivant :

$$\chi_0^2 = 3{,}15 \quad \text{avec} \quad \nu = 5 \text{ degrés de liberté,}$$

d'où

$$Pr[\chi^2 > \chi_0^2] = 0{,}70.$$

Comme précédemment, les fréquences théoriques ont été déterminées graphiquement à partir de la droite de Henri.

Le résultat du test conduit donc à admettre l'hypothèse d'une distribution galtonienne de y.

Les calculs qui précèdent conduisent en définitive à considérer comme vraisemblables les hypothèses suivantes :

— ramenées à l'origine 11,5, les largeurs de Max. E et Max. L ont même moyenne, même variance, et suivent la même loi de distribution.

— cette loi de distribution commune est correctement représentée par une loi de Galton.

Remarque. — Peut-être aurait-il été possible de procéder à un ajustement plus proche de la distribution observée (par exemple par une loi de Pearson III). J'ai préféré me borner à un ajustement au moyen de lois susceptibles d'être directement rattachées à un phénomène physique (loi de Gauss ou de « l'effet constant » — loi de Galton ou de « l'effet proportionnel »).

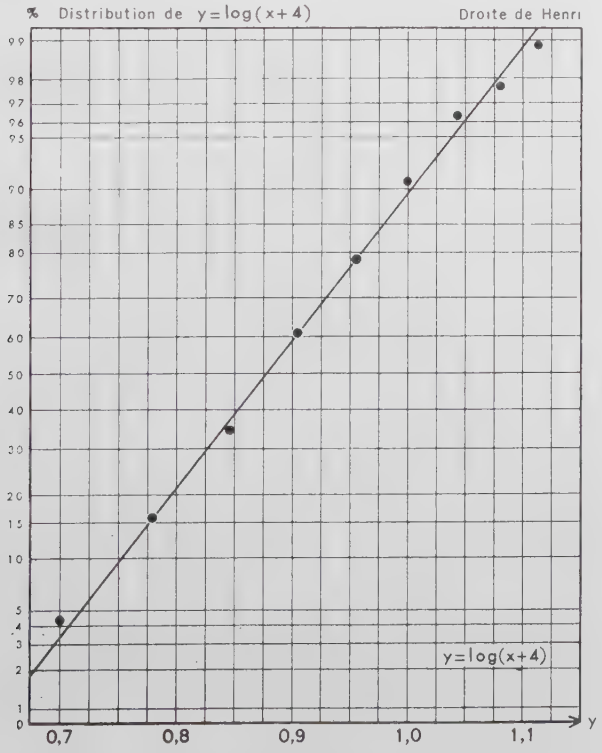


Fig. 7. — Distributions de $y = \log (x + 4)$. Droite de Henri.

II. Relations entre maxima successifs

Dans ce qui précède, il n'a pas été tenu compte du fait que l'échantillon étudié constitue une série chronologique. Pour exploiter toute l'information contenue dans les données, il importe donc de prendre en considération leur ordre de succession.

1) *Relations concernant la nature des maxima.*

Nous désignerons par « nature » d'un maximum le caractère « étroit » ou « large » qu'on peut lui attacher.

Rappelons tout d'abord quelques définitions et propriétés des probabilités en chaîne.

Soit un système (Σ) susceptible de prendre aux temps $t_1, t_2 \ldots t_n \ldots$ différents états en nombre fini r ; soient $E(i_1, t_1)$, $E(i_2, t_2)$ .... $E(i_n, t_n)$ les différents états observés consécutivement aux instants t_1, t_2 .... t_n ($i = 1,2, \ldots r$), $E(j, t_{n+1})$ l'état que l'on observera après le prochain changement d'état, ou transition, au temps t_{n+1}.

On dit que le système (Σ) évolue en chaîne de Markov simple si, quels que soient j et n, la probabilité d'observer un état donné $E(j)$ au temps t_{n+1}, soit $Pr\,[E(j, t_{n+1})]$, ne dépend que de l'état précédent $E(i_n, t_n)$ et non des états antérieurs, comme cela pourrait avoir lieu. En d'autres termes, la probabilité conditionnelle $Pr\,[E(j, t_{n+1})/E(i_1, t_1), E(i_2, t_2) \ldots E(i_n, t_n)]$ est identique à la probabilité conditionnelle $Pr\,[E(j, t_{n+1})/E(i_n, t_n)]$ et ne dépend que de j et de $E(i_n, t_n)$.

Le probabilité $Pr\,[E(j, t_{n+1})/E(i_n, t_n)]$ est appelée *probabilité de transition* en une épreuve de $E(i_n)$ à $E(j)$; nous conviendrons de représenter celle-ci par la notation $P_{i.j}^{(1)}$.

On peut de même définir la probabilité de transition de l'état $E(i)$ à l'état $E(j)$ en p épreuves :

$$Pr[E(j, t_{n+1}/E(i, t_{n-p+1})] = P_{i.j}^{(p)},$$

qui se calcule par récurrence à partir des $P_{i.j}^{(1)}$.

Les probabilités de transition $P_{ij}^{(k)}$, pour k donné, constituent une matrice carrée d'ordre r, appelée matrice de transition :

$$\| P^{(k)} \| = \left\| \begin{matrix} P_{1.1}^{(k)} & \ldots & P_{1.r}^{(k)} \\ P_{r.1}^{(k)} & \ldots & P_{r.r}^{(k)} \end{matrix} \right\|.$$

Tous les termes de $\|P^{(k)}\|$ sont positifs, inférieurs à 1 ; la somme des termes d'une colonne est égale à 1 :

$$\sum_{i} P_{i.j}^{(k)} = 1.$$

On démontre qu'une chaîne de Markov simple est caractérisée par la relation :

$$\|P^{(k)}\| = \|P^{(1)}\|^k.$$

Les maxima de SS Cygni sont de nature « étroite » : Max. E ou « large » : Max. L. Il est donc possible d'observer quatre séquences différentes de deux maxima consécutifs :

Max E — Max E avec la probabilité $P_{E.E}^{(1)}$,
Max E — Max L » » $P_{E.L}^{(1)}$,
Max L — Max E » » $P_{L.E}^{(1)}$,
Max L — Max L » » $P_{L.L}^{(1)}$.

Les probabilités attachées à chacune de ces paires peuvent être estimées par leur fréquence dans l'échantillon :

		Maximum $k-1$: Max E	Maximum $k-1$: Max L	Total
Maximum k	Max E	67	168	235
	Max L	168	33	201
Total		235	201	436

D'où la matrice de transition en une épreuve :

$$\|P^{(1)}\| = \left\| \begin{matrix} 0{,}285 & 0{,}836 \\ 0{,}715 & 0{,}164 \end{matrix} \right\|,$$

Calculons de la même façon les matrices de transition en deux épreuves $\|P^{(2)}\|$ et en trois épreuve $\|P^{(3)}\|$

$$\|P^{(2)}\| = \left\| \begin{matrix} 0{,}655 & 0{,}405 \\ 0{,}345 & 0{,}595 \end{matrix} \right\|,$$

$$\|P^{(3)}\| = \left\| \begin{matrix} 0{,}504 & 0{,}585 \\ 0{,}496 & 0{,}415 \end{matrix} \right\|,$$

Calculons par ailleurs le carré et le cube de $P^{(1)}$

$$\|P^{(1)}\|^2 = \left\| \begin{matrix} 0{,}679 & 0{,}375 \\ 0{,}321 & 0{,}625 \end{matrix} \right\|,$$

$$\|P^{(1)}\|^3 = \left\| \begin{matrix} 0{,}462 & 0{,}629 \\ 0{,}538 & 0{,}371 \end{matrix} \right\|,$$

Si les maxima de SS Cygni évoluent (en ce qui concerne leur nature) suivant une chaîne de Markov simple, on doit vérifier que $\|P^{(2)}\|$ et $\|P^{(1)}\|^2$, $\|P^{(3)}\|$ et $\|P^{(1)}\|^3$ ne sont pas significativement différentes.

Il convient pour cela de calculer les intervalles de confiance des probabilités de transition $P_{i.j}^{(2)}$ et $P_{i.j}^{(3)}$ et de vérifier si les valeurs théoriques $P_{i.j}^{\prime(2)}$ et $P_{i.j}^{\prime(3)}$, éléments des matrices $\|P^{(1)}\|^2$ et $\|P^{(1)}\|^3$ sont intérieures à ces intervalles.

Les Max. E peuvent être répartis en 2 catégories selon la nature du deuxième maximum suivant.

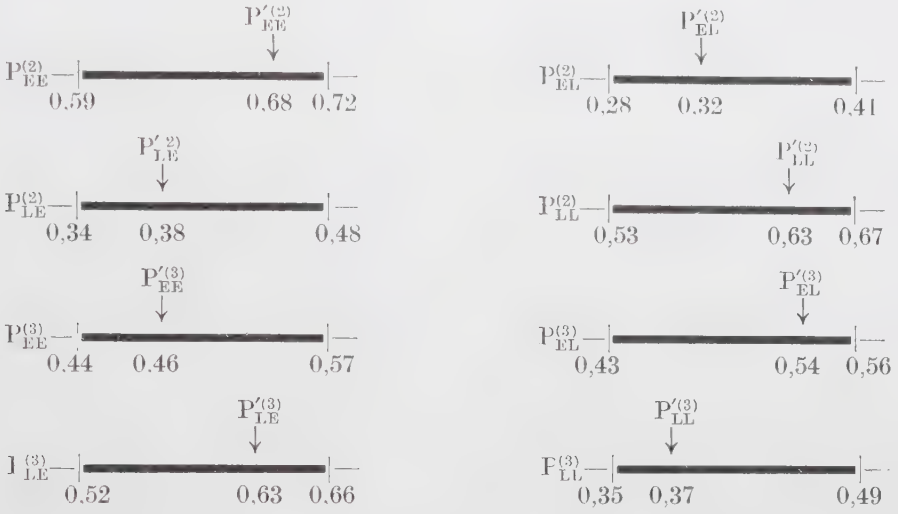
On peut donc assimiler les paires Max. E-Max.E, Max. E-Max. L à des boules blanches et noires se trouvant dans une urne dans les proportions :

$$p = P^{(2)}_{EE} = 0{,}655,$$
$$q = P^{(2)}_{EL} = 0{,}345.$$

La fréquence d'extraction des boules blanches (couple Max. E-Max. E) suit donc une loi binomiale qui, en raison de l'étendue de l'échantillon, peut être assimilée à une loi normale de moyenne $P^{(2)}_{EE}$, de variance $\frac{pq}{n_E}$.

D'où l'intervalle de confiance à 95 % de $P^{(2)}_{EE}$ et par un raisonnement identique, celui des autres probabilités de transition.

Le graphique ci-dessous représente la position des probabilités de transition théoriques par rapport aux intervalles de confiance ainsi calculés :



Les probabilités de transition théoriques en 2 et 3 épreuves sont en fait déduites des fréquences expérimentales $P^{(1)}$; il conviendrait donc de leur associer également un intervalle de confiance. Mais ce calcul est rendu inutile par le fait que les valeurs centrales de ces intervalles, soit $P'^{(2)}$ et $P'^{(3)}$, se trouvent situées à l'intérieur des intervalles de confiance des probabilités $P^{(2)}$ et $P^{(3)}$.

Il résulte de ceci que l'on peut admettre l'hypothèse selon laquelle *la nature des maxima évolue suivant une chaine de Markov simple.*

En d'autres termes, il est vraisemblable de supposer *qu'en probabilité la nature d'un maximum de rang k dépend, et dépend seulement, de la nature du maximum de rang k — 1*, et non de celle des maxima de rang inférieur à $k - 1$.

a) On peut confirmer la validité de cette hypothèse en vérifiant qu'elle rend bien compte du nombre de séquences de maxima de même nature rencontrées dans l'échantillon étudié.

Cet échantillon se compose de $n = 437$ éléments présentant les caractères E (Max. E) ou L (Max. L), chacun d'eux occupant un rang bien déterminé dans l'échantillon.

On peut former $n - 2 = 435$ « groupes » de 3 éléments consécutifs, parmi lesquels on note :

— 113 combinaisons L. E. L.

— 322 autres combinaisons.

Ces 435 groupes sont supposés prélevés au hasard dans une population de « groupes » contenant la combinaison L. E. L., et les autres combinaisons dans les proportions respectives :

$$p = \frac{113}{435} = 0{,}260,$$
$$q = \frac{322}{435} = 0{,}740.$$

La fréquence d'apparition de la combinaison L. E. L., est une variable aléatoire sensiblement gaussienne (approximation normale de la loi binomiale), de moyenne p, de variance $\frac{pq}{n-2}$. D'où l'intervalle de confiance pour le nombre de combinaisons L. E. L., sorties au cours de 435 tirages ;

$$113 - 2\sqrt{(n-2)\,pq} < f(\text{L. E. L.}) < 113 + 2\sqrt{(n-2)\,pq}$$
$$95 < f(\text{L. E. L.}) < 131$$

Par ailleurs, nous formulons les hypothèses suivantes :

— les probabilités d'apparition des caractère E ou L au cours de tirages *indépendants* dans la population ont les valeurs suivantes :

$$P_E = \frac{n_E}{n} = \frac{236}{437} = 0{,}540,$$

$$P_L = \frac{n_L}{n} = \frac{201}{437} = 0{,}460.$$

– les probabilités d'apparition des caractère E ou L lors du k^{ieme} tirage dépendent, et dépendent seulement, du résultat du tirage de rang $k - 1$. Leurs valeurs constituent les éléments de la matrice $\|P^{(1)}\|$ écrite précédemment.

Ces hypothèses permettent de calculer la probabilité de former, au cours de 3 tirages consécutifs de rang k, $k + 1$, $k + 2$, la combinaison L. E. L.

$$Pr[\text{L. E. L.}] = P_L . P^{(1)}_{LE} . P^{(1)}_{EL} = 0{,}275.$$

Si l'on effe;tue $(n - 2)$ séries indépendantes de 3 tirages consécutifs, la valeur la plus probable du nombre de combinaisons L. E. L., sera :

$$f' \text{ (L. E. L.)} = (n - 2)\, P_L . P^{(1)}_{LE} . P^{(1)}_{EL} = 119{,}6.$$

On constate que f' (L. E. L) est bien intérieur à l'intervalle de confiance de f(L. E. L.).

Le raisonnement s'étend sans difficulté aux combinaisons L. E. E. L., L. E. E. E. L. etc... que l'on notera $LE^{(2)}L$, $LE^{(3)}L$, ...

Les résultats sont les suivants (tableau II).

TABLEAU II

Combinaisons	Fréquence observée	Intervalle de confiance	Fréquence théorique
L. E. L.	113	95-131	119,6
L. $E^{(2)}$. L.	43	31- 55	34,0
L. $E^{(3)}$. L.	9	non calculé	9,7
L. $E^{(4)}$. L.	2	non calculé	2,7
E. L. E.	141	non calculé	140,4
E. $L^{(2)}$. E.	22	»	23,0
E. $L^{(3)}$. E.	4	»	3,8
E. $L^{(4)}$. E.	1	»	0,6

Ce tableau fait apparaître le bon accord entre le nombre de séquences de maxima de même nature effectivement observées et le nombre théorique déduit des hypothèses faites sur la population d'où ils sont extraits.

b) Il convient de souligner que l'analyse statistique qui précède conduit, non pas à *établir* de façon certaine l'existence d'une chaîne de Markov *simple* entre les natures des maxima, mais à *ne pas rejeter* une telle hypothèse, compte-tenu de l'effectif de l'échantillon dont on dispose. On donnera une assise plus solide à celle-ci si l'on peut montrer que la succession dans le temps des Max. E et Max. L ne saurait être représentée par une chaîne de Markov d'ordre supérieur à 1.

Soit un système (Σ) présentant r états possibles. Si ce système évolue suivant un processus markovien d'ordre 2, la probabilité d'observer au temps t l'état E_i, soit $Pr\ [E_t]$ dépend des états E_{t-1} et E_{t-2} observés aux instants $t - 1$ et $t - 2$. On peut ramener un tel processus à l'ordre 1 en considérant que les états E_{2s} et E_{2s+1} aux instants $2s$ et $2s + 1$ définissent un nouvel état E'_s du système, qui présentera alors r^2 états possibles. On vérifiera alors, suivant la méthode précédemment utilisée, que la suite des états E'_s évolue suivant une chaîne de Markov simple.

Appliqué à SS Cygni, ce schéma conduit à définir 4 états possibles que l'on symbolisera par EE, EL, LE, LL, La matrice des probabilités de transition en une épreuve, déduite des données d'observation, se présente ainsi :

2 \ 1	EE	EL	LE	LL
EE	0,062	0,255	0,031	0,067
EL	0,219	0,594	0,375	0,800
LE	0,594	0,113	0,485	0,133
LL	0,125	0,038	0,109	0

1. État précédant.
2. État suivant.

Soit $\|P^{(1)}\|$ cette matrice. Si le système ainsi défini évolue en chaîne de Markov simple, on doit vérifier que la matrice $\|P^{(2)}\|$ des probabilités de transition en 2 épreuves n'est pas significativement différente de $\|P^{(1)}\|^2$.

Le tableau suivant représente la matrice $\|P^{(2)}\|$, les valeurs entre parenthèses étant les éléments de la matrice $\|P^{(1)}\|^2$, ou valeurs théoriques.

2 \ 1	EE	EL	LE	LL
EE	0,156 (0,087)	0,152 (0,173)	0,156 (0,120	0,067 (0,212)
EL	0,406 (0,466)	0,543 (0,482)	0,453 (0,499	0,467 (0,540)
LE	0,344 (0,366)	0,248 (0,278)	0,328 (0,310)	0,333 (0,195)
LL	0,094 (0,081)	0,057 (0,067)	0,063 (0,071	0,133 (0,053)

On a encadré les cases où l'écart entre valeurs théoriques et valeurs observées est le plus important. Mais il n'est pas possible d'établir que ces valeurs sont significativement différentes, car le nombre total des maxima se trouve divisé par 2, et les 233 états ainsi obtenus sont répartis en 4 classes, si bien que la faiblesse numérique des effectifs de chacune d'elles conduit à des intervalles de confiance extrêmement larges. On trouve ainsi, pour les valeurs observées, les intervalles de confiance au niveau 0,95 suivants :

— élément EL/EL : 0,45 — 0,64 ;
— élément EE/EE : 0,03 — 0,28.

D'un point de vue strict, on ne peut donc rejeter l'hypothèse d'une évolution en chaîne de Markov simple pour le processus étudié, donc d'une chaîne d'ordre 2 pour la succession des Max. E et Max. L. Mais les écarts ci-dessus semblent néanmoins assez élevés pour faire présumer qu'un tel modèle n'est pas adéquat.

2) *Relations concernant la largeur des maxima*

Les maxima de chaque nature peuvent être divisés en deux catégories selon la nature du maximum précédent.

Nous appellerons :

Max. (E)E un Max. E précédé d'un Max. E.

M_{EE} sa largeur.

n_{EE} le nombre de Max. (E)E observés.

Cette notation s'étend sans difficulté aux autres combinaisons possibles de maxima.

a) *Étude des Max. E.*

— Les moyennes $\overline{M_{EE}}$ et $\overline{M_{LE}}$ ne sont pas significativement différentes. En effet :

$$\begin{aligned} \overline{M_{LE}} &= 7{,}69 \quad \text{avec} \quad n_{LE} = 168, \\ \sigma(M_{LE}) &= 1{,}61 \\ \overline{M_{EE}} &= 7{,}64 \quad \text{avec} \quad n_{EE} = 67, \\ \sigma(M_{EE}) &= 2{,}08 \\ \overline{M_{E}} &= 7{,}69 \quad \text{avec} \quad n_{E} = 235. \\ \sigma(M_{E}) &= 1{,}76 \end{aligned}$$

Les $n_{LE} = 168$ Max. (L)E peuvent être considérés comme résultant d'un tirage exhaustif dans la population finie constituée par les $n_E = 235$ Max. E. Par conséquent :

$$\sigma(\overline{M_{LE}}) = \frac{\sigma(M_E)}{\sqrt{n_{LE}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n_{LE}}{n_E}}.$$

D'où, en admettant que $\overline{M_{LE}}$ est distribuée normalement, l'intervalle de confiance à 95 % de $\overline{M_{LE}}$:

$$7{,}54 < M_{LE} < 7{,}84,$$

intervalle comprenant les valeurs $\overline{M_{EE}}$ et $\overline{M_E}$.

— On peut calculer les coefficients de corrélation entre M_{LE} et M_{EE} d'une part, les largeurs des Max. L ou Max. E qui précèdent, d'autre part. On obtient les résultats suivants :

— corrélation M_E précédent/M_{EE} : $n_{EE} = 67$.
$r = -0{,}12$ — valeur non significative.

On n'est pas certain de la linéarité de la régression, mais le calcul du rapport de corrélation η^2 n'est pas possible en raison du faible effectif de l'échantillon.

— corrélation M_L précédent/M_{LE} : $n_{LE} = 168$.
$\eta^2 = 0{,}079$ — valeur non significative.

— On peut encore tester l'homogénéité des échantillons de Max. (L)E d'une part, de Max. (E)E d'autre part, suivant la méthode déjà appliquée (cf page 19).

On a regroupé les données en 4 classes, de telle sorte que les effectifs de chacune d'elles soient supérieurs à 10.

On obtient : $\chi^2 = 11{,}2$ avec $\nu = 3$ degrés de liberté. D'où :

$$Pr[\chi^2 > \chi_0^2] = 0{,}01.$$

Ce niveau de probabilité ne permet pas de se prononcer avec certitude sur l'acceptation ou le rejet de l'hypothèse d'une distribution commune à M_{LE} et M_{EE}.

b) *Étude des Max. L.*

— Les moyennes $\overline{M_{EL}}$ et $\overline{M_{LL}}$ apparaissent dans ce cas significativement différentes :

$$\begin{aligned} \overline{M_{EL}} &= 15{,}28 \quad \text{avec} \quad n_{EL} = 168, \\ \sigma(M_{EL}) &= 1{,}70 \\ \overline{M_{LL}} &= 14{,}42 \quad \text{avec} \quad n_{LL} = 33, \\ \sigma(M_{LL}) &= 1{,}78 \\ \overline{M_{L}} &= 15{,}14 \quad \text{avec} \quad n_{L} = 201. \\ \sigma(M_{L}) &= 1{,}75 \end{aligned}$$

On calcule comme précédemment l'intervalle de confiance à 95 % de $\overline{M_{EL}}$:

$$15{,}17 < \overline{M_{EL}} < 15{,}39.$$

On constate que $\overline{M_L}$ et $\overline{M_{LL}}$ sont extérieurs à cet intervalle.

— Le calcul des corrélations : largeurs max. précédents/largeurs Max. L donne les résultats suivants :

— corrélation M_L précédent/M_{LL} : $n_{LL} = 33$; $r = -0,27$ — valeur non significative.

— corrélation M_E précédent/M_{EL} : $n_{EL} = 168$; $\eta^2 = 0,054$ — valeur non significative.

— Le test d'homogénéité des distributions de Max. (L) L et Max. (E) L conduit à la valeur :

$$\chi_0^2 = 17,6 \qquad \text{avec} \qquad \nu = 2 \text{ degrés de licerté}$$
$$Pr[\chi^2 > \chi_0^2] < 0,001.$$

Il est donc peu vraisemblable que les largeurs des Max. (L) L et Max (E) L suivent la même loi de distribution.

On peut dégager de ce qui précède les conclusions suivantes :

— l'ensemble des maxima de même nature (Max E ou Max L) ne peut être considéré comme extrait d'une population homogène.

— la nature du maximum précédent semble constituer l'élément responsable de cette hétérogénéité ; on note les résultats suivants :

$$\overline{M_{LE}} > \overline{M_{EE}} \quad \text{(différence non significative)},$$
$$\overline{M_{EL}} > \overline{M_{LL}} \quad \text{(différence significative)}.$$

Ainsi, en valeur moyenne, la largeur d'un maximum suivant un maximum de même nature serait inférieure à celle d'un maximum suivant un maximum de nature opposée.

— on ne constate aucune corrélation significative entre largeurs de maxima consécutifs groupés en combinaisons homologues (Max E/Max E ; Max E/Max L ; Max L/Max E ; Max L/Max L). Une corrélation analogue calculée sur l'ensemble des maxima ne pourrait que traduire l'alternance de Max E Max L, à moins de n'éliminer l'influence de ce phénomène par un changement de variables. Ce point sera repris ultérieurement.

III. Magnitude et type des maxima

1) *Distribution des magnitudes et des types*

La figure 8 représente la courbe de fréquence des magnitudes des Max. E et Max. L. Ces deux distributions affectent des formes semblables mais il apparaît clairement que les Max. E sont en général moins brillants que les Max. L, les valeurs modales différant de 0,2 magnitude.

Soient E_E, E_L les magnitudes des Max. E et

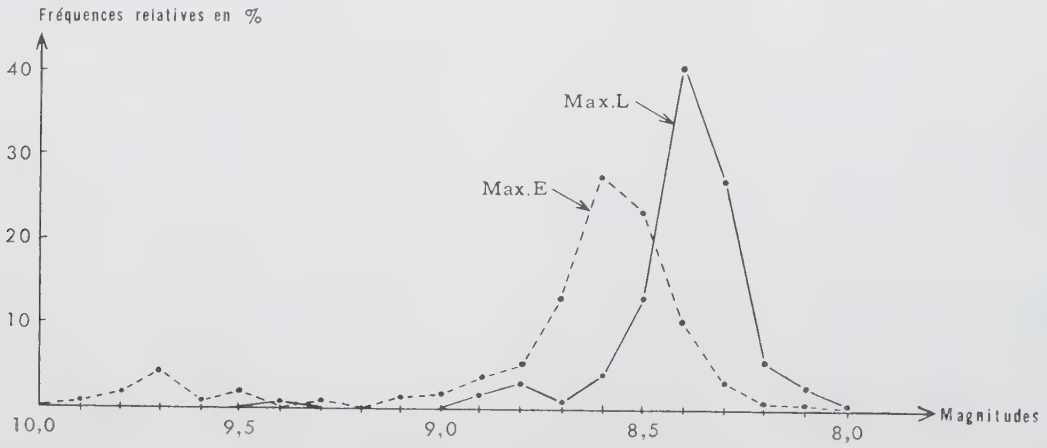


Fig. 8. — Distribution des magnitudes des maxima.

Max. L. Les éléments de ces distributions sont les suivants :

$$\overline{E_E} = 8,68 \qquad \overline{E_L} = 8,39,$$
$$\sigma(E_E) = 0,37 \qquad \sigma(E_L) = 0,16.$$

Dans la première partie de cette étude, j'ai signalé la dispersion notable des estimations visuelles de l'éclat, pouvant se traduire, lorsque la densité des observations est faible, par des erreurs importantes sur la magnitude des maxima. C'est pourquoi je n'ai pas estimé utile de soumettre cette grandeur à une analyse statistique très poussée, et en particulier d'ajuster la courbe des fréquences par une distribution théorique, de forme analytique vraisemblablement complexe du fait de sa dissymétrie.

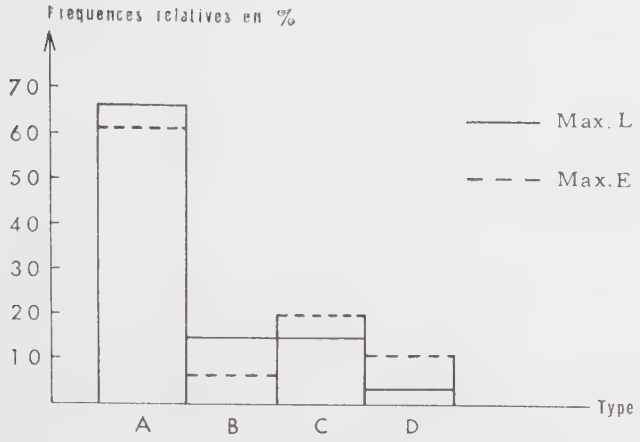


FIG. 9. — Distribution des types des maxima.

Rappelons que CAMPBELL a réparti les maxima en 4 types A, B, C, D, suivant la rapidité de croissance de l'éclat du minimum au maximum.

La figure 9 représente la distribution de fréquence des types de maxima pour les Max. E et les Max. L. Étant donné l'aspect subjectif de cette classification, j'ai regroupé les types B, C, D, en un type « non-A ». La table de contingence entre nature et type des maxima est la suivante :

		TYPE A	TYPE NON A	TOTAL
Nature	Max E	142	92	234
	Max L	133	67	200
	TOTAL	275	159	434

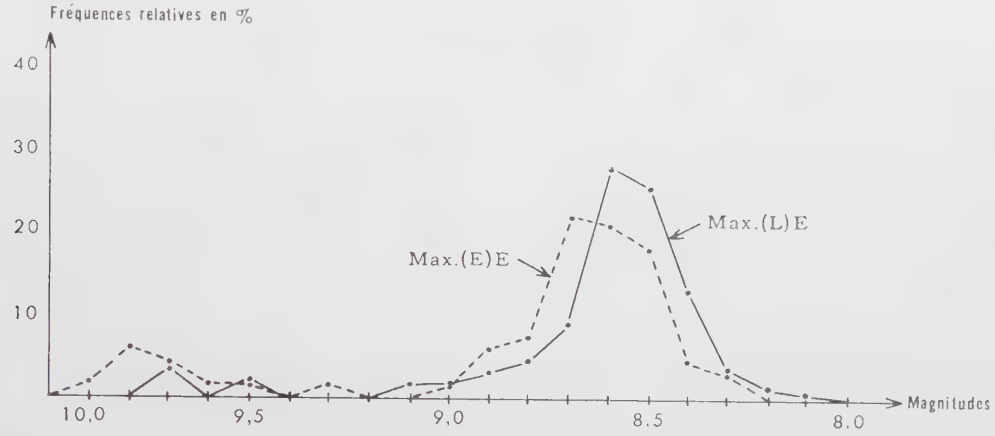


FIG. 10. — Distribution des magnitudes des Max. E.

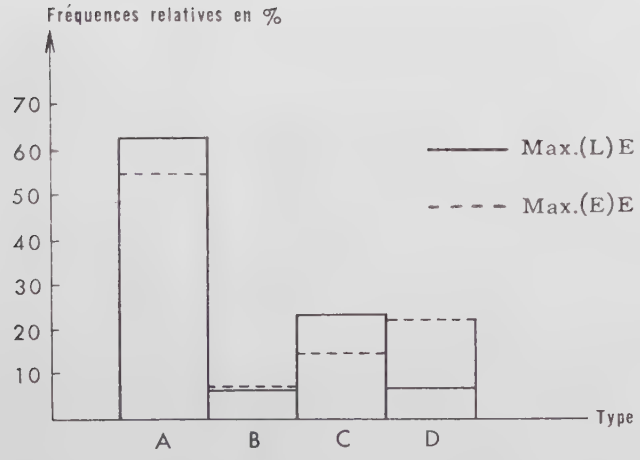


FIG. 11. — Distribution des types des Max.E.

On peut cependant raisonnablement admettre que E_E et E_L suivent des lois différentes, l'écart entre les courbes de fréquence (fig. 8) étant assez important.

Le total des maxima est de 434 seulement, 3 d'entre eux n'ayant pu être classés dans l'un des 4 types.

On trouve :

$$\chi_0^2 = 1{,}6 \qquad \text{avec} \qquad \nu = 1.$$
$$Pr[\chi^2 > \chi_0^2] = 0{,}25.$$

On peut donc admettre l'hypothèse de l'indépendance entre nature et type des maxima.

Les figures 10 et 11 représentent les distributions de fréquence des magnitudes et des types des Max. E suivant la nature du maximum précédent. Les valeurs modales des magnitudes diffèrent de 0,1 magnitude, et il ne semble plus que l'on puisse considérer des deux distributions comme significativement différentes. Comme précédemment, la répartition en types A et non-A n'apparaît pas liée à la nature du maximum.

Les figures 12 et 13 concernent les distributions de fréquence des magnitudes et des types des

Max. L suivant la nature du maximum précédent. Les conclusions sont les mêmes : identité des distributions des magnitudes, indépendance des types et natures des maxima.

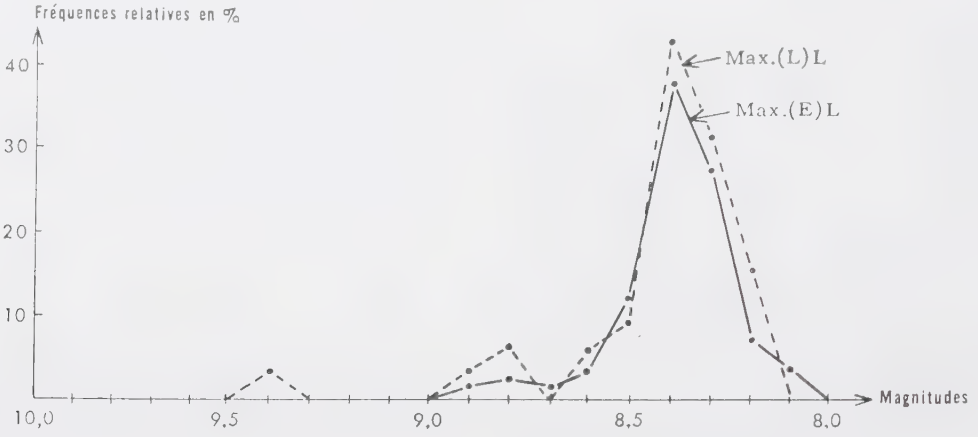


Fig. 12. — Distribution des magnitudes des Max. L.

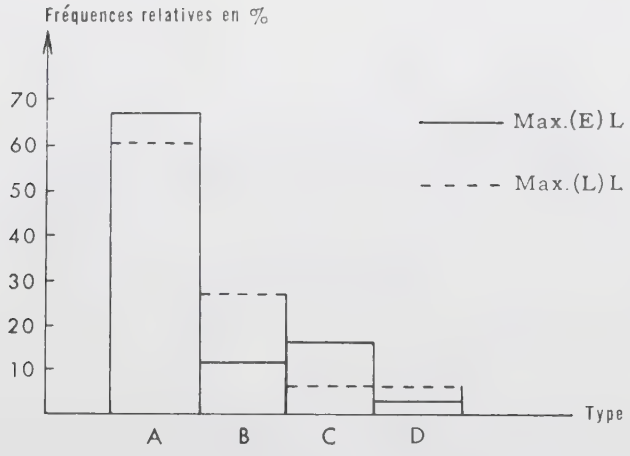


Fig. 13. — Distribution des types des Max. L.

2) *Relations entre magnitudes, types et largeurs des maxima.*

Le calcul de la corrélation entre largeurs M_E et magnitudes E_E des Max. E conduit à une valeur du rapport de corrélation hautement significative :

$$\eta^2_{E_E/M_E} = 0{,}66.$$

L'examen de la table de corrélation (tableau III) sur laquelle on a reporté les moyennes liées de E_E montre que ce sont principalement les maxima de largeur $M_E \leqslant 5$ jours qui sont responsables de cette valeur élevée du rapport de corrélation. La régression de E_E en M_E n'est pas linéaire ; les maxima sont d'autant plus brillants que leur largeur est plus proche de la largeur moyenne.

Le tableau IV reproduit la table de corrélation entre M_L et E_L. Le rapport de corrélation n'a plus qu'une valeur faiblement significative (niveau compris entre 0,05 et 0,01) : $\eta^2_{E_L/M_L} = 0{,}12$. Si l'on observe bien une diminution de la brillance moyenne pour les faibles largeurs de maxima, celle-ci est nettement moins importante que pour les Max. E.

La figure 14 représente la répartition des types de maxima en fonction de leur largeur. Il apparaît que les maxima de largeurs voisines de la moyenne sont plus volontiers du type A, le type non-A étant plus fréquent pour les maxima de largeurs extrêmes.

La figure 15 représente la répartition des types de maxima en fonction de leur magnitude. Il apparaît que les Max. E de magnitude supérieure à 9,0 sont tous de type non-A. Ce phénomène est moins apparent pour les Max. L, puisqu'un seul maximum est de magnitude supérieure à 9,0 ; celui-ci est également de type non-A.

En définitive, on peut dégager les conclusions suivantes :

— les magnitudes des Max. E et Max. L sont distribuées suivant deux lois vraisemblablement différentes ;

— par contre, les types (A ou non-A) sont répartis semblablement dans l'une et l'autre classe de maxima ;

— la nature du maximum précédent semble sans relation avec la distribution des magnitudes et des types du maximum suivant ;

— la largeur, la magnitude et le type des Max. E semblent liés ; cette relation est moins nette pour les Max. L.

M_E / E_E	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Total
8.1							1				1
8.2						1		1			2
8.3					3	1	2	1		1	8
8.4				1	3	8	7	4	1		24
8.5				1	4	12	19	11	7		54
8.6					14	16	17	8	6	3	64
8.7				1	2	7	5	7	9		31
8.8					3	3	1	2	3	1	13
8.9					1	1	2	1	2	2	9
9.0					1			1		2	4
9.1					1			1	1		3
9.2											—
9.3				1							1
9.4											—
9.5		1	1	1	1						4
9.6				1							1
9.7		2	2	5							9
9.8	2			2							4
9.9		1									1
Total	2	4	3	13	33	49	54	37	29	9	233

Tableau III. — Corrélation largeur Max .E/magnitude Max. E ●——● moyennes liées de E_E.

E_L \ M_L	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	Total
8,0					1							1
8,1		1	1		2	1						5
8,2			5	2	3	2						12
8,3	4	5	11	12	10	7	4		1		1	55
8,4	1	8	22	26	10	3	6	3		2		81
8,5		2	4	15	3	3						27
8,6	1	1	3	1			2					8
8,7				1			1					2
8,8	2		2		2							6
8,9	1			1		1						3
⋮												⋮
9,4	1											1
Total	10	17	48	58	31	17	13	3	1	2	1	201

Tableau IV. — Corrélation largeur Max. L/magnitude Max.L ●——● moyennes liées de E_L.

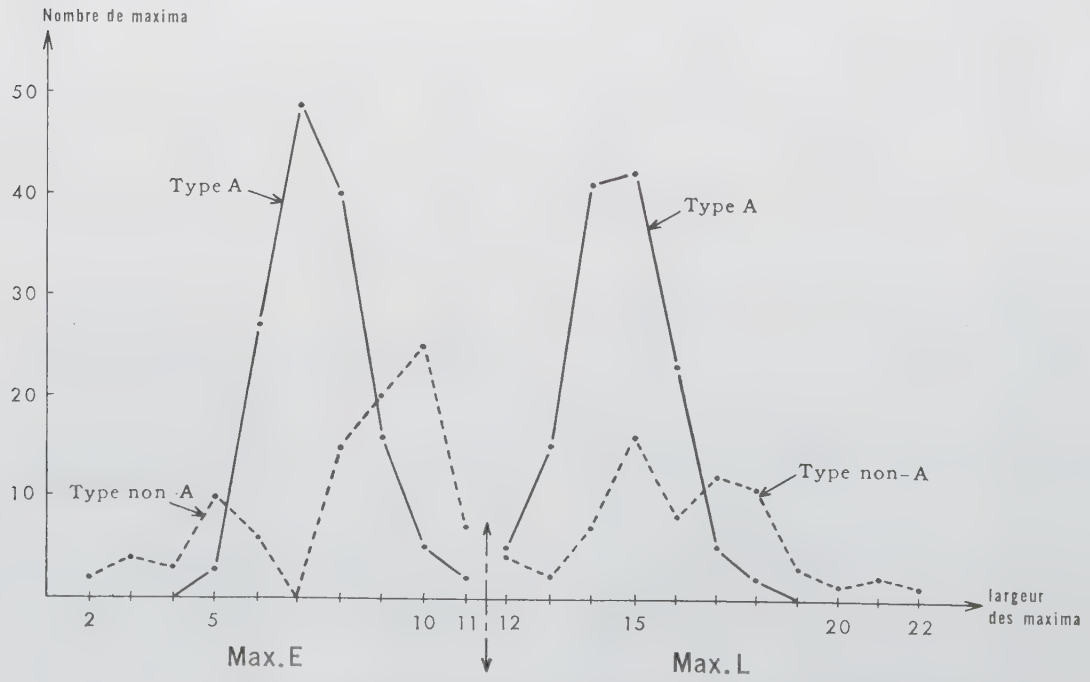


Fig. 14. — Répartition des types de maxima en fonction de leur largeur.

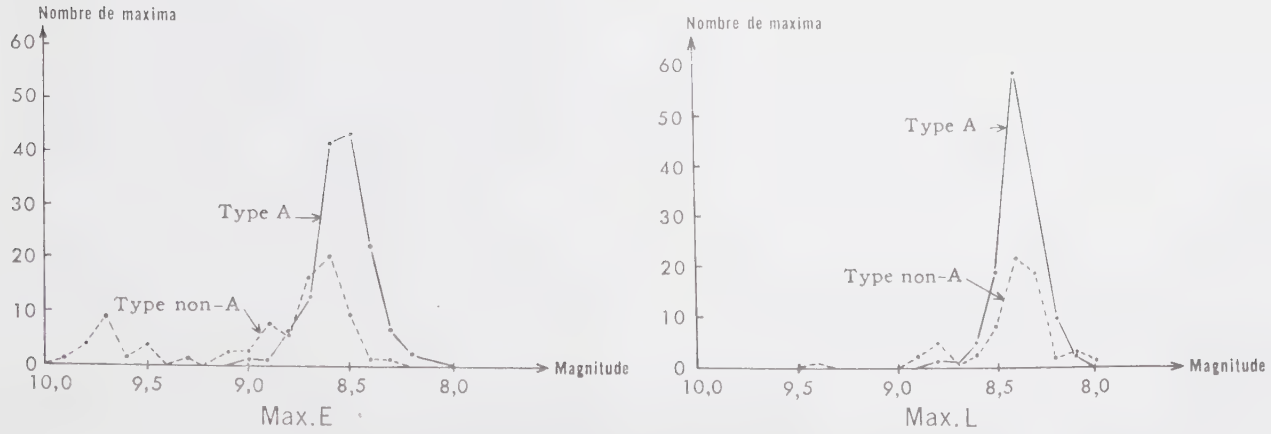


FIG. 15. — Répartition des types de maxima en fonction de leur magnitude.

B. — Étude des minima.

Les minima d'éclat de SS Cygni peuvent être caractérisés par leur largeur et leur magnitude. Si la largeur se trouve déterminée avec une précision acceptable, il n'en est pas de même des magnitudes, car l'estimation visuelle d'un éclat de l'ordre de 11,5 magnitudes est nécessairement entachée d'une erreur importante. Mon étude a donc uniquement porté sur la largeur des minima, que l'on désignera par m.

I. Distribution des largeurs de minima

La figure 16 représente l'histogramme des largeurs des 436 minima consécutifs, regroupées en classes d'amplitude 5, de valeur centrale multiple entier de 5.

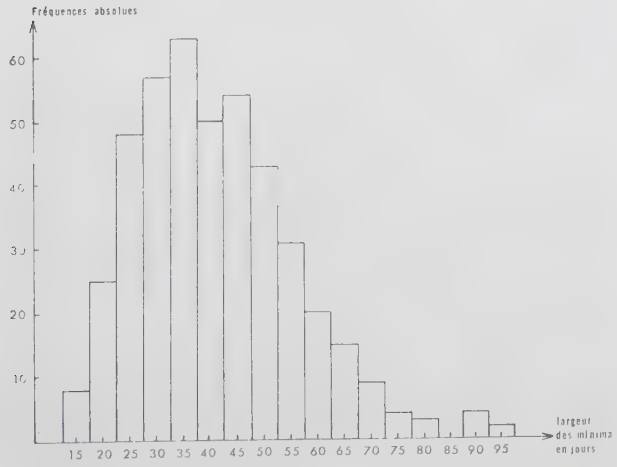


FIG. 16. — Histogramme des largeurs de minima.

Les caractéristiques de cette distribution sont les suivantes :

$$\overline{m} = 41{,}1,$$
$$\sigma(m) = 14{,}87.$$

La forme de l'histogramme suggère l'essai d'un ajustement de la distribution au moyen d'une loi de Galton : la figure 17 montre que les valeurs de $z = \log. m$ sont très sensiblement distribuées suivant une loi normale. Le test de l'ajustement conduit à la valeur $\chi_0^2 = 5{,}2$ avec $\nu = 11$ degrés de liberté, correspondant au niveau de probabilité :

$$Pr[\chi^2 > \chi_0^2] \# 0{,}90.$$

(Les fréquences théoriques ont été lues sur la droite de Henri, tracée à partir de $\bar{z}$ et $\sigma(z)$).

La distribution des largeurs de minima est donc très correctement représentée par une loi de Galton.

Il convient cependant d'examiner si cette distribution est homogène ; on peut en effet considérer quatre classes de minima, selon la nature des maxima adjacents. La largeur d'un minimum suivant un Max. E et précédant un Max. L sera désignée par m_{EL} ; on déduira sans difficulté les notations analogues relatives aux autres classes de maxima.

La tableau V donne la répartition des minima entre ces 4 classes.

Les distributions de m_{LE} et m_{EL} apparaissent très semblables : un test d'homogénéité appliqué à ces deux séries conduit à une valeur $\chi_0^2 = 9{,}4$,

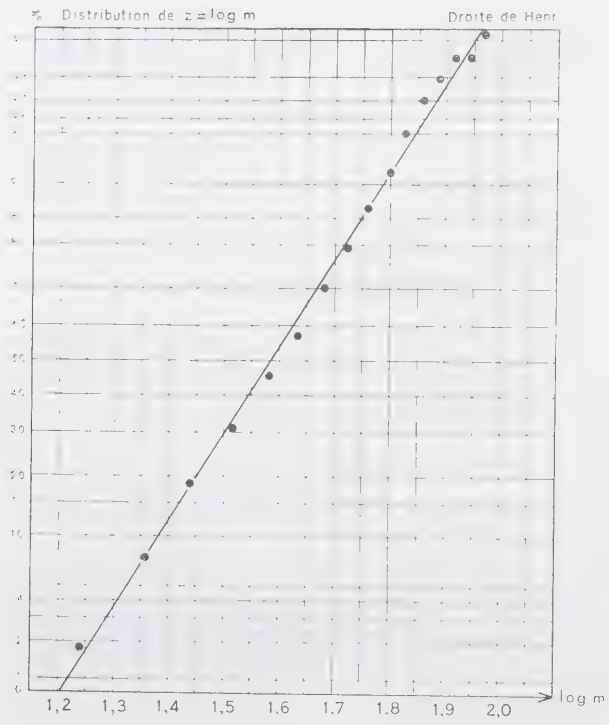


Fig. 17. — Distribution de $z = \log m$. Droite de Henri.

avec $\nu = 10$, d'où un niveau de probabilité : $Pr\ [\chi^2 > \chi_0^2] \# 0{,}5$. On peut donc accepter l'hypothèse que les séries de m_{EL} et m_{LE} observées sont issues d'une population unique.

Désignons par m_A la largeur d'un minimum compris entre deux maxima de natures différentes ; la série des m_A est donc constituée par la fusion des séries de m_{EL} et m_{LE}. La figure 18 représente la droite de Henri correspondant à la distribution de $z_A = \log. m_A$. Il apparaît que la distribution des z_A est très sensiblement gaussienne. Un test de la valeur de cet ajustement conduit à la valeur $\chi_0^2 = 9{,}1$ avec $\nu = 9$ degrés de liberté, d'où le niveau de probabilité : $Pr\ [\chi^2 > \chi_0^2] \# 0{,}5$. On est donc fondé à admettre que les m_A sont distribués suivant une loi de Galton.

TABLEAU V

Largeurs (valeurs centrales)	Nombre de minima				Ensemble des minima
	m_{EE}	m_{LE}	m_{EL}	m_{LL}	m
—	—	—	—	—	—
15	4	2	2	—	8
20	12	4	8	1	25
25	22	10	15	1	48
30	15	23	18	1	57
35	9	27	26	1	63
40	3	24	23	—	50
45	—	26	22	6	54
50	1	21	18	3	43
55	—	16	9	6	31
60	1	5	11	3	20
65	—	8	5	2	15
70	—	—	5	4	9
75	—	1	—	3	4
80	—	1	2	—	3
85	—	—	—	—	—
90	—	—	2	2	4
95	—	—	2	—	2
Total....	67	168	168	33	436

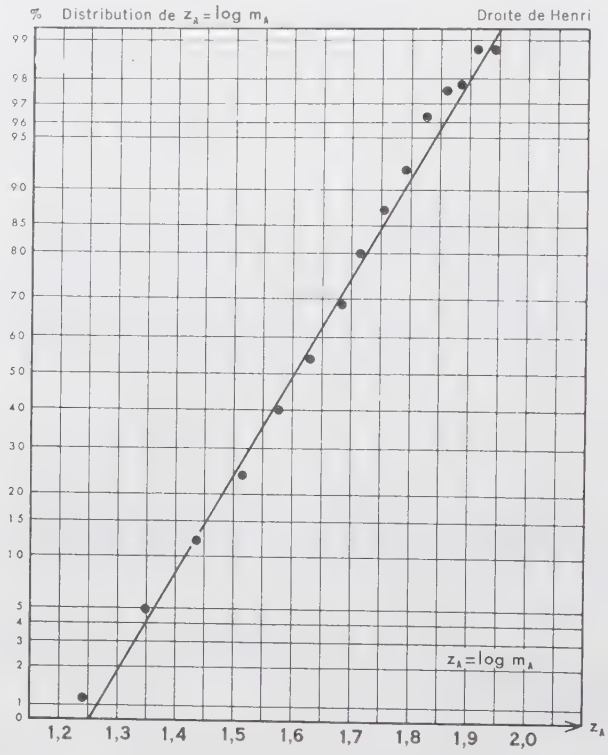


Fig. 18. — Distribution de $z_A = \log m_A$. Droite de Henri.

La figure 19 représente les courbes de fréquence relative des m_{EE}, m_A et m_{LL}. Celles-ci apparaissent si nettement distinctes que l'on peut conclure sans l'application d'un test, à l'hétérogénéité des 3 distributions.

On a pointé sur la figure 20 les valeurs de $z_{EE} = \log. m_{EE}$ et $z_{LL} = \log. m_{LL}$ en fonction de leurs fréquences portées en échelle gaussienne. On remarque que la distribution de z_{EE} est très sensiblement gaussienne ; toutefois, étant donné la faible étendue de l'échantillon (67 minima) le test en χ^2 de la valeur de l'ajustement n'a plus grande signification, et n'a donc pas été appliqué.

En ce qui concerne les m_{LL}, il semblerait que l'on puisse trouver une constante m_0 telle que $z_{LL} = \log.(m_{LL} - m_0)$ soit distribué normalement.

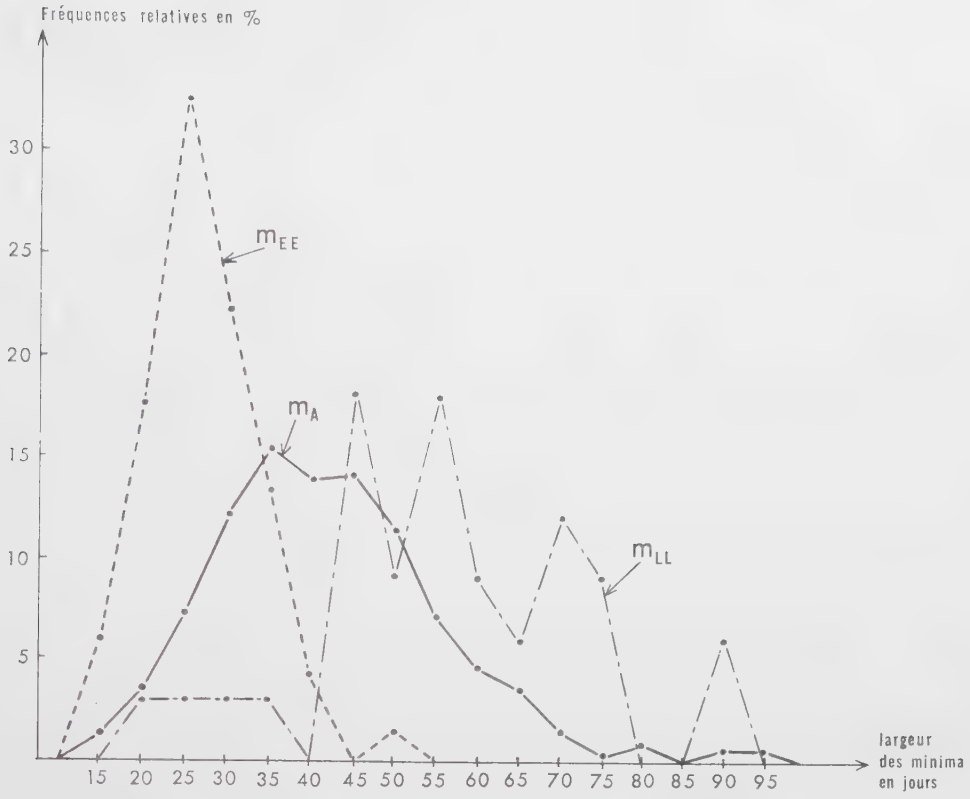


FIG. 19. — Courbes de fréquence des largeurs de minima.

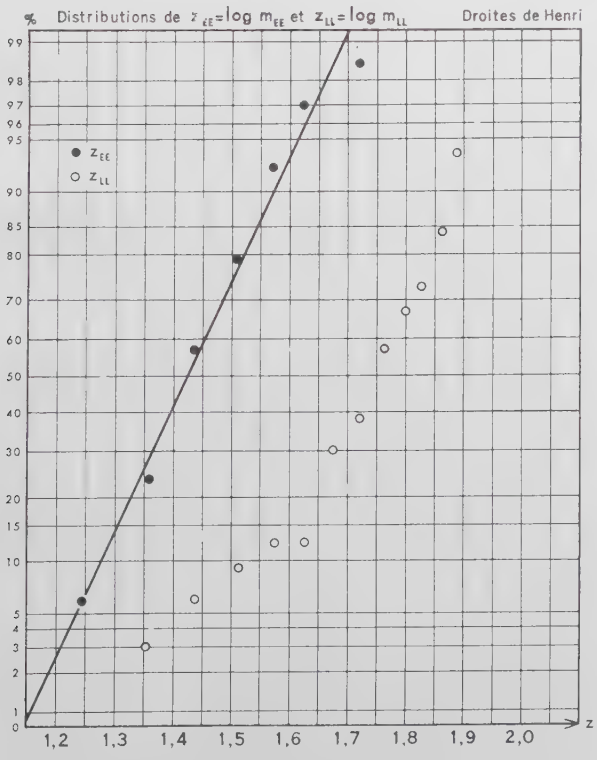


FIG. 20. — Distributions de $z_{EE} = \log m_{EE}$ et $z_{LL} = \log m_{LL}$. Droites de Henri.

Mais les 33 minima m_{LL} sont en trop petit nombre pour qu'il soit possible de rechercher une telle distribution théorique.

On peut finalement dégager de l'étude des largeurs de minima les conclusions suivantes :

— pris dans leur ensemble, les minima sont distribués suivant une loi de Galton : $z = \log.m$ est une variable gaussienne ;

— si l'on subdivise les minima en 4 classes suivant les différentes combinaisons possibles des natures des maxima adjacents, on constate que les minima m_{EL} et m_{LE} ne diffèrent pas significativement de distribution ; on peut donc les regrouper en une classe unique de minima m_A, distribués suivant une loi de Galton ($z_A = \log.m_A$ est une variable gaussienne).

TABLEAU VI

	m_{EE}	m_{EL}	m_{LE}	m_{LL}	m_A	m
n	67	168	168	33	336	436
moyenne	27,5	42,8	41,8	56,2	42,3	41,1
écart-type	7,8	15,4	11,9	16,1	13,7	14,9
$\frac{\sigma}{m}$	0,28	0,36	0,28	0,29	0,32	0,36

— malgré la faible étendue de l'échantillon, on peut considérer que les minima m_{EE} sont distribués également suivant une loi de Galton ; aucune conclusion ne peut être établie avec un degré suffisant de certitude pour les minima m_{LL} en raison de la trop faible valeur de leur effectif.

Le tableau VI donne les moyennes et écarts-types de chacune de ces distributions.

On notera la valeur remarquablement stable du coefficient de variation $\frac{\sigma}{m}$.

II. Relations entre minima et maxima

1° *Corrélations entre largeurs de minima et de maxima.*

Les largeurs de minima étant distribuées différemment suivant la nature des maxima adjacents, il convient de rechercher les corrélations pouvant exister entre les largeurs des minima et celles des maxima précédents ou suivants.

J'ai donc calculé les rapports de corrélation η^2 (ou les coefficients de corrélation linéaire r lorsque la trop faible étendue de l'échantillon ne permet pas le calcul de η^2) pour les couples suivants de variables

X	Y	n	η^2_{YX} ou r_{YX}	Valeurs de η^2 ou r au niveau 0,05	Résultat
—	—	—	—	—	—
M_E	m_{EL}	168	$\eta^2 = 0{,}133$	0,155	non significatif
m_{EL}	M_L	168	$\eta^2 = 0{,}043$	0,108	non significatif
M_L	m_{LE}	168	$\eta^2 = 0{,}048$	0,131	non significatif
m_{LE}	M_E	168	$\eta^2 = 0{,}147$	0,091	*significatif*
M_L précédent	m_{LL}	33	$r = -0{,}46$	0,34	*significatif*
m_{LL}	M_L suivant	33	$r \neq 0$	0,34	non significatif
M_E précédent	m_{EE}	67	$r = +0{,}15$	0,24	non significatif
m_{EE}	M_E suivant	67	$r = +0{,}23$	0,24	non significatif

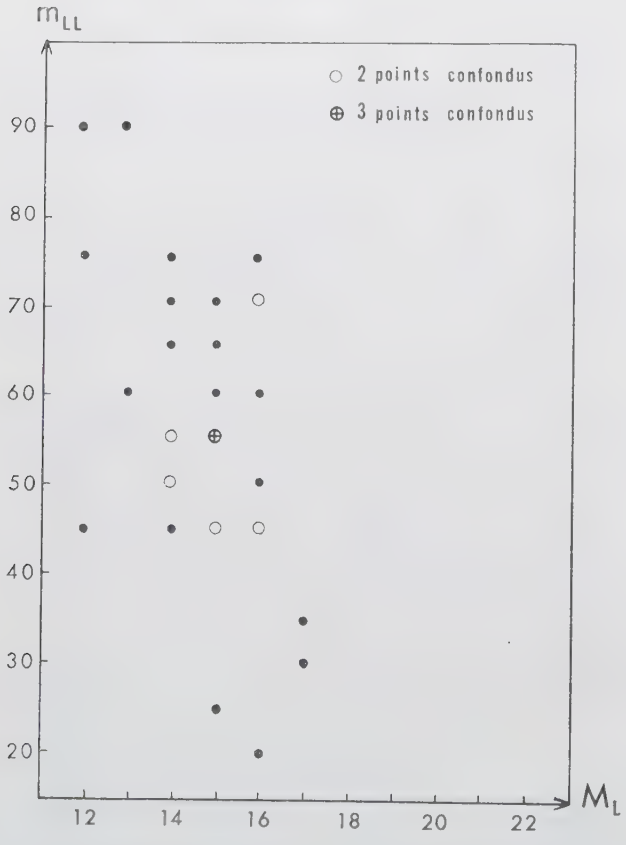


Fig. 21. — Corrélation M_L/m_{LL}.
○ : 2 points confondus. ⊕ : 3 points confondus.

Deux corrélations seulement apparaissent significatives d'une liaison entre les variables, et demandent un examen plus attentif.

Corrélation m_{LE}/M_E.

Le tableau VII reproduit le tableau de corrélation entre m_{LE} et M_E ; on a représenté graphiquement sur celui-ci les moyennes liées de M_E. Alors que, pour $m_{LE} \geqslant 35$, ces moyennes liées conservent une valeur sensiblement constante, on constate qu'elles sont fonction croissante de m_{LE} pour $m_{LE} < 30$; cette dépendance est sans doute responsable de la valeur significative trouvée pour η^2.

Ce résultat est à rapprocher de ceux établis précédemment, lors de l'étude des magnitudes des Max. E (tableau III) : il semblerait en définitive que les Max. E se subdivisent en deux classes, les Max. E les plus étroits ($M_E \leqslant 5$) ayant des magnitudes significativement différentes de celles des autres Max. E, et des largeurs corrélées avec celles du minimum précédent.

Corrélation M_L/m_{LL}.

La figure 21 représente le nuage de points de cette corrélation. Le faible effectif de l'échantillon ($n = 33$) rend illusoire le calcul des moyennes liées. L'examen du nuage de points montre toute-

M_E \ m_{LE}	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	Total
2															0
3	1		1			1									3
4				1											1
5	1	1		3		1	1								7
6		2	4	6	6	6	2	1	2						29
7		1	2	3	5	4	5	6	5		3				34
8				4	6	3	9	7	8	2	2	1	1		43
9				4	5	2	5	6	1	2	3				28
10			3	1	3	5	4			1					17
11				1	2	2		1							6
Total	2	4	10	23	27	24	26	21	16	5	8	0	1	1	168

Tableau VII. — Corrélation m_{LE}/M_E. ●——● moyennes liées de M_E.

fois que la liaison entre M_L et m_{LL} est assez lâche : la valeur du coefficient de corrélation correspond à un niveau de signification voisin de 0,01. On ne peut donc considérer comme certaine l'existence d'une telle liaison, mais tout au plus en admettre une présomption.

2° *Corrélation entre largeurs de minima consécutifs.*

Négligeant les différentes distributions des largeurs de minima, j'ai calculé, pour l'ensemble de ceux-ci, le rapport de corrélation entre largeurs de minima consécutifs : le tableau VIII reproduit le tableau de corrélation, sur lequel on a reporté les valeurs des moyennes liées. Les résultats sont les suivants :

$$\eta^2 = 0{,}125.$$

Valeur de η^2 au niveau 0,05 :

$$\eta^2_{0{,}05} = 0{,}060.$$

Il existe donc une liaison significative entre minima consécutifs, dont le sens est indiqué par la courbe de régression tracée sur le tableau VIII : les largeurs de minima présentent une « tendance à la conservation » de leurs valeurs.

Ce point sera repris ultérieurement.

De l'étude des liaisons intéressant les minima se dégagent les conclusions suivantes :

(1) Minima précédents.

(2) Minima suivants.

(2) \ (1)	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	Total
15	1	1			3	3												8
20	2	3	8	7		4	1											25
25	1	6	11	10	7	2	2	6	1	1								47
30		2	6	11	10	7	10	6	1	1	1			1		1		57
35		6	4	6	11	9	6	7	3	4	3	2	1				1	63
40	1	2	5	9	6	2	6	6	6	2	1	1	1	1		1		50
45	2	1	4	7	14	4	7	7	1	3	1	3						54
50		1	4	2	4	7	11	6	4	1	2	1						43
55		1		1	4	5	3	2	5	4	1	1	2	1		1		31
60			3	1	2	5	3	1	4	1								20
65				1		1	3	1	3	2	3						1	15
70		1		1		1	2	1	1	1	1							9
75			1		1						1					1		4
80			1						1			1						3
85																		—
90	1			1	1						1							4
95		1							1									2
Total	8	25	47	57	63	50	54	43	31	20	15	9	4	3	—	4	2	435

Tableau VIII. — Corrélation minimum précédent/minimum suivant.
(1) Minima précédents. (2) Minima suivants. ●——● moyennes liées de (2).

— parmi toutes les corrélations que l'on peut calculer entre largeurs de minima et largeurs des maxima adjacents, une seule apparaît significative d'une liaison. Celle-ci serait imputable aux Max. E de largeur inférieure à 6 jours, qui semblent constituer une sous-classe des Max. E : ils se différencient de ceux-ci par leur magnitude, leur type, et par la relation existant entre leur largeur et celle du minimum précédent ;

— la corrélation entre minima successifs, quelle que soit la nature des maxima qui les séparent, est significative d'une liaison.

C. Recherche des organisations.

On a précédemment souligné le fait que le matériel statistique utilisé dans cette étude constitue une série chronologique : il importe donc, pour retirer toute l'information contenue dans les données, de tenir compte à la fois des valeurs prises par chaque variable, et du rang qu'elles occupent au sein de la série.

Cette préoccupation est apparue occasionnellement dans ce qui précède (corrélations entre maxima ou minima consécutifs, ordre de succession des natures de maxima). Le présent chapitre a pour objet de reprendre et de compléter les résultats déjà établis.

Une série chronologique peut être totalement aléatoire (par exemple : série des numéros sortis à la roulette), ou présenter à un degré plus ou moins élevé, une certaine organisation. La recherche du caractère organisé d'une série constitue un problème relativement simple : l'application de divers tests permet d'accepter ou de rejeter l'hypothèse d'une organisation. Un certain nombre de ceux-ci ont été établis ou améliorés par KIVELIOVITCH et VIALAR [7], et il en sera fait usage. Il convient toutefois de remarquer que, si chacun de ces tests conduit au rejet de l'hypothèse d'une organisation, on ne peut pour autant en conclure avec certitude que la série étudiée est totalement aléatoire : il n'est pas démontré que l'ensemble de ces tests soit à même de déceler toute organisation possible quelle qu'en soit la structure.

Dans le cas où l'un de ces tests met en évidence une organisation de la série étudiée, il y a lieu de rechercher la nature ou la forme de cette organisation : problème beaucoup plus complexe, nécessitant en particulier une masse considérable de calculs numériques.

C'est pourquoi je me suis borné à la recherche des organisations, n'abordant que superficiellement celui de leur structure.

On trouvera en Annexe II un exposé succinct des différents tests utilisés ci-après.

I. Série des largeurs de minima

On a vu précédemment que le rapport de corrélation entre largeurs de minima consécutifs avait une valeur significativement différente de 0. La série des minima présente donc une certaine organisation, dont la structure sera quelque peu précisée grâce à l'application des tests du hasard.

Les éléments de cette série sont les suivants (les notations étant celles indiquées en Annexe II).

$$\left.\begin{array}{l} N = 436 \\ S = 123 \\ C = 122 \end{array}\right\} M = S + C = 245,$$

$$\left.\begin{array}{l} P_c = 122 \\ P_d = 122 \end{array}\right\} P = P_c + P_d = 244.$$

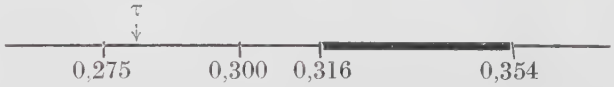
*Test des maxima** (1).

τ = fréquence observée = 0,282.

Limites de l'intervalle de confiance à 95 %.

$\tau_{min} = 0{,}316,$

$\tau_{max} = 0{,}354.$



On constate un déficit significatif du nombre de maxima*.

Test des phases.

Le tableau IX ci-dessous résume les résultats du test.

TABLEAU IX

Phases	Nombre de phases observées			Intervalles de confiance à 95 %	
	Croissantes	Décroissantes	Total	Phases C ou D	Total
1	69	57	126	78,6-101,8	164,0-196,9
2	27	39	66	29,0- 50,4	64,2- 94,6
⩾ 3	26	26	52	7,2- 21,6	18,7- 39,1
	$P_c = 122$	$P_d = 122$	$P = 244$		

1. Dans la terminologie adoptée par KIVELIOVITCH et VIALAR [7], et conservée dans cette étude, le terme « maxima » désigne les « sommets » et les « creux » de la courbe représentative de la série chronologique étudiée. Pour éviter toute confusion, le mot « maxima » est suivi d'un astérisque (maxima*) lorsqu'il est pris dans ce sens.

TABLEAU X

Test des liaisons de phases appliqué a la série des minima

Phases i-croissantes						Phases i-décroissantes					
		k						k			
i	j	1	2	$\geqslant 3$	Total	i	j	1	2	$\geqslant 3$	Total
	1	17 30,8 21,2-40,4	5 13,0 6,2-19,8	9 4,6	31 48,4 37,6-59,2		1	18 30,8 21,2-40,4	8 13,0 6,2-19,8	7 4,6	33 48,4 37,6-59,2
1	2	12 12,2 5,6-18,8	6 5,8 1,1-10,5	5 2,2	23 20,2 12,0-28,4	1	2	6 12,2 5,6-18,8	1 5,8 1,1-10,5	4 2,2	11 20,2 12,0-28,4
	$\geqslant 3$	7 4,1 0,1-8,1	3 2,1	4 0,8	14 7,0 1,9-12,1		$\geqslant 3$	8 4,1 0,1-8,1	4 2,1	1 0,8	13 7,0 1,9-12,1
	1	8 13,0 6,2-19,8	1 5,3 0,8-9,8	3 1,8	12 20,2 12,0-28,4		1	8 13,0 6,2-19,8	8 5,3 0,8-9,8	4 1,8	20 20,2
2	2	4 5,8 1,1-10,5	1 2,7	2 1,0	7 9,5	2	2	3 5,8 1,1-10,5	5 2,7	3 1,0	11 9,5
	$\geqslant 3$	7 2,1	1 1,1	— 0,4	8 3,6		$\geqslant 3$	3 2,1	3 1,1	2 0,4	8 3,6
	1	8 4,6	4 1,8	1 0,6	13 7,0 1,9-12,1		1	5 4,6	7 1,8	3 0,6	15 7,0 1,9-12,1
$\geqslant 3$	2	4 2,2	4 1,0	1 0,4	9 3,6	$\geqslant 3$	2	3 2,2	1 1,0	1 0,4	5 3,6
	$\geqslant 3$	2 0,8	1 0,4	1 0,2	4 1,4		$\geqslant 3$	2 0,8	2 0,4	1 0,2	5 1,4
Total		69 75,6 65,0-86,2	26 33,3 23,5-43,1	26 12,1 5,5-18,7	121			56 75,6 65,0-86,2	39 33,3 23,5-43,1	26 12,1 5,5-18,7	121

Les valeurs encadrées sont celles situées en dehors des intervalles de confiance : on constate ainsi un déficit des phases 1, croissantes et décroissantes, et des phases 2, croissantes, et un excédent des phases d'ordre 3 ou plus.

Test des liaisons de phases.

Le tableau X donne, pour chaque suite de phases i, j, k le nombre de suites observées, le nombre le plus probable dans l'hypothèse d'une série purement aléatoire, et pour certaines valeurs, l'intervalle de confiance à 95 %. Cet intervalle n'a pas été calculé dans tous les cas, soit parce que les valeurs observées et théoriques étaient visiblement non significativement différentes, soit en raison du trop petit nombre de suites (approximation normale non valable). On a encadré les nombres de suites observées sortant de l'intervalle de confiance.

Le déficit de phases 1 et l'excédent de phases 3 mis en évidence par le test précédent, apparaissent également dans ce tableau.

Test des croisements.

Le tableau XI, dans lequel sont encadrées les valeurs extérieures à l'intervalle de confiance, donne les résultats de ce test.

TABLEAU XI

Ordonnée de la droite de coupure	Nombre de croisements observés	Nombre de croisements théoriques	Intervalle de confiance à 95 % du nombre de croisements
entre 15 et 20	14	15,3	
» 20 et 25	52	61,0	46,6- [75,4
» 25 et 30	94	132,1	113,1 - 151,1
» 30 et 35	136	188,4	167,0 - 209,8
» 35 et 40	168	216,7	195,8 - 237,6
» 40 et 45	168	208,0	187,2 - 228,8
» 45 et 50	148	183,1	162,5 - 203,7
» 50 et 55	100	140,4	120,9 - 159,9
» 55 et 60	88	99,4	81,9 - 116,9
» 60 et 65	56	75,9	60,1 - 91,7
» 65 et 70	40	41,4	
» 70 et 75	24	25,3	
» 75 et 80	18	17,9	
» 80 et 85	12	12,2	
» 85 et 90	12	12,2	
» 90 et 95	4	4,4	

On note un important déficit du nombre de croisements, pour 7 droites de coupures sur 16. Ce test est donc également positif en faveur d'une organisation de la série.

Ainsi, les 4 tests appliqués conduisent tous au rejet de l'hypothèse d'une série des minima purement aléatoire ; cette série est donc assez nettement organisée.

De plus, ces tests donnent une indication qualitative sur la structure de cette organisation. En effet, le déficit du nombre de croisements traduit une tendance à la conservation des valeurs — tendance qui apparaissait déjà dans la corrélation entre minima consécutifs. En outre, le déficit des maxima*, le déficit des phases 1 et l'excédent des phases 3 montrent une conservation du sens des variations qui affectent les largeurs de minima : la largeur d'un minimum dépendrait ainsi des largeurs des minima précédents et du sens de la variation de celles-ci.

II. Série des maxima

1° *Largeurs des maxima.*

Les tests du hasard appliqués à la série des largeurs de l'ensemble des maxima font apparaître en premier lieu l'organisation la plus importante, qui est la succession alternée de Max. E et de Max. L. Les 267 premiers maxima conduisent aux résultats suivants :

— excédent de maxima* ;

— excédent de phases 1, déficit de phases 2 et 3 ;
— excédent du nombre de croisements.

Pour rechercher l'existence éventuelle d'une organisation secondaire, il faut éliminer dans la série l'effet résultant de la succession alternée de maxima de natures différentes ; on atteint ce but en effectuant le changement de variable défini lors de l'ajustement des largeurs de maxima.

$$x_E = 11{,}5 - M_E,$$
$$x_L = M_L - 11{,}5.$$

Appliquée à la série des valeurs ainsi transformées des largeurs de maxima, les tests du hasard conduisent aux résultats suivants :

— test des maxima* : $\tau = 0{,}317$;
intervalle de confiance à 95 % : 0,316 — 0,354.

— test des phases ;

Phases	Nombre de phases observées			Intervalles de confiance a 95 %	
	C	D	Total	C ou D	Total
—	—	—	—	—	—
1	98	82	180	78,8 -102,1	164,4-197,3
2	23	28	51	29,0 - 50,5	64,4- 94,8
⩾ 3	17	27	44	7,26- 21,7	18,7- 39,1

— test des croisements : les nombres de croisements observés sont tous situés à l'intérieur des intervalles de confiance.

Ainsi, un seul test conduit à rejeter l'hypothèse d'une série purement aléatoire : la série des valeurs transformées des largeurs de maxima présente donc une légère organisation, se traduisant par un déficit des phases 2, et un excédent de phases 3.

Cette organisation conduit également à une valeur du rapport de corrélation entre valeurs successives faiblement significative $\eta^2 = 0{,}052$ correspondant au niveau de probabilité 0,01.

2° *Types de maxima.*

Si l'on groupe les types B, C, D en un seul type, les maxima peuvent appartenir aux 2 types A ou non-A. Appelons « suite homogène » toute séquence de A (ou non-A) précédée et suivie d'un non-A (ou A). Soient R le nombre total de suites dans la série étudiée, m le nombre de A, n le nombre de non-A.

Dans l'hypothèse d'une série purement aléatoire, on démontre que R est une variable gaussienne (pour m et n assez grands) de moyenne :

$$\overline{R} = \frac{2m.n}{m + n} + 1,$$

de variance :

$$\sigma^2(R) = \frac{2mn(2mn - m - n)}{(m+n)^2(m+n-1)}.$$

On obtient les résultats numériques suivants :

$$\overline{R} = 202{,}5,$$
$$\sigma(R) = 3{,}05,$$
$$R \text{ observé} = 156.$$

Variable réduite : $t = \dfrac{R - \overline{R}}{\sigma(R)} = -15.$

La série des types de maxima présente donc une très forte organisation se traduisant par un déficit important du nombre de suite. Il y a tendance à la conservation du type.

3° *Magnitudes des maxima.*

Il est sans intérêt d'examiner la série des magnitudes des maxima : on a vu en effet que celles-ci sont liées à la nature des maxima. L'application des tests du hasard à la série des magnitudes ne pourrait que traduire simplement l'alternance des maxima de nature différente.

III. Série des séquences de maxima de même nature

Pour abréger l'exposé, nous conviendrons de désigner par « accident » la succession de deux maxima de même nature, et l'on distinguera ainsi les accidents A constitués par le couple Max. E-Max. E, et les accidents B par le couple Max. L-Max. L. On a vu que l'on observait, sur la série de données, $m = 67$ A et $n = 33$ B.

La figure 22 représente la position de ces accidents A et B dans la série des 437 maxima observés.

Pour étudier la succession dans le temps de ces accidents, j'ai fait abstraction des séquences où les Max. E et Max. L sont régulièrement alternés, ce qui conduit à la figure 23 où l'on a représenté uniquement les éléments A et B. Il apparaît immédiatement que le rangement de ces $N = m + n = 100$ éléments n'est pas purement aléatoire, c'est-à-dire tel qu'il résulterait de tirages indépendants dans une urne contenant ces 100 élé-

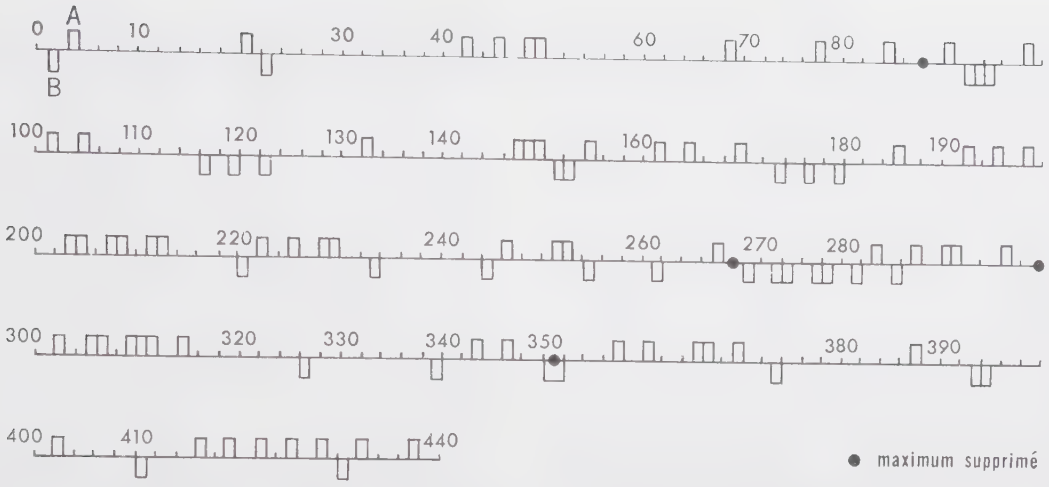


FIG. 22. — Position des accidents A et B dans la série des maxima
(les nombres en abscisses repèrent les maxima dans la numérotation de l'A. A. V. S. O.).

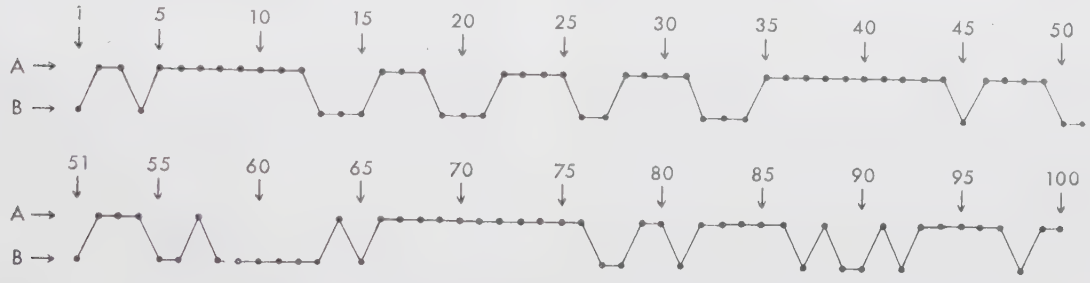


FIG. 23. — Série chronologique des accidents A et B.
accident A : séquence Max. E — Max. E. accident B : séquence Max. L — Max. L.

ments. Cette impression est confirmée par l'application du test des suites homogènes :

$$\overline{R} = 45{,}2,$$
$$\sigma(R) = 4{,}39,$$
$$R \text{ observé} = 34.$$

Variable réduite : $t = \dfrac{R - \overline{R}}{\sigma(R)} = -2{,}56.$

correspondant au niveau de probabilité 0,005.

Il est donc très peu vraisemblable que le rangement des A et des B dans la série étudiée soit purement aléatoire. On constate en particulier que certaines époques sont favorables à l'apparition d'accidents A, d'autres à celle d'accidents B.

REMARQUE. — Si les tests du hasard peuvent déceler l'organisation d'une série, ils sont impuissants à préciser si cette organisation est de nature cyclique ou non. Je n'ai pas recherché l'existence de cycles éventuels en raison de la masse considérable de calculs numériques qu'entraîne cette étude

TROISIÈME PARTIE

ÉTUDES ANTÉRIEURES

I. ÉTUDES STATISTIQUES

Les méthodes de la statistique mathématique ont été relativement peu appliquées dans l'étude des courbes de lumière des étoiles variables, vraisemblablement en raison du petit nombre de séries homogènes et continues d'observations.

KREIKEN [8], [9] s'est particulièrement attaché à l'étude des variables périodiques et semi-régulières (principalement céphéides et variables d'amas,) en vue d'établir une classification de celles-ci. Au moyen des méthodes classiques de

l'analyse harmonique (auto-corrélation ; périodogramme ; spectre de fréquences, etc...), il détermine la moyenne quadratique de l'amplitude $\pi(0)$ de la période fondamentale et $\pi(1)$ du premier harmonique. Le rapport $A = \left[\frac{\pi(1)}{\pi(0)}\right]^{1/2}$ est ensuite porté sur un graphique en fonction du logarithme log P de la période fondamentale. Le nuage de points ainsi constitué n'est pas également réparti dans le plan, mais présente certaines concentrations permettant une répartition des étoiles étudiées (au nombre de plusieurs centaines) en différents types.

Eddington et Plakidis [10], puis Plakidis [11], [12] ont étudié les irrégularités de périodes des étoiles variables à longue période. L'intervalle de temps séparant deux maxima consécutifs n'est pas constant ; le but poursuivi par ces auteurs est de déterminer si ces variations autour de la période moyenne relèvent de causes purement aléatoires et indépendantes, ou si elles traduisent une évolution de la période vraie du phénomène.

Sterne [13], [14], [15] reprenait peu après le travail d'Eddington et Plakidis, en affinant la méthode de recherche des variations de la période vraie de l'étoile. Il précisait les conditions d'utilisation des diagrammes O-C (écarts entre périodes observées et calculées dans l'hypothèse d'une période vraie constante) couramment utilisés pour la recherche des variations cycliques de la période, et appliquait la théorie ainsi élaborée à l'étude de quelques étoiles à courte et longue période, et à une binaire à éclipse.

Quels que soient les buts poursuivis, les méthodes élaborées par les auteurs précédents reposent essentiellement sur la période de la courbe de lumière de l'étoile, c'est-à-dire sur l'intervalle de temps séparant deux maxima.

Ces méthodes ne sont donc applicables qu'aux seules étoiles dont la courbe de lumière présente une périodicité bien définie, que Payne et Gaposchkin [1] classent dans les types « variables géométriques » et « variables de la séquence principale ». Elles ne sont plus valables pour les « variables cataclysmiques », dont la courbe de lumière présente bien un caractère cyclique mais sans périodicité nettement définie.

Il est donc nécessaire d'aborder l'étude de ces dernières par des procédés différents.

Stewart [16], puis Stewart et Panofsky [17] ont établi un schéma probabiliste permettant la construction synthétique d'une courbe présentant les mêmes caractéristiques que la courbe de lumière de SS Cygni. Mais, comme l'indiquent ces auteurs, il reste à étudier de quelle utilité peut être ce schéma pour la connaissance du phénomène physique.

Disposant des 220 premiers maxima de SS Cygni, Kruytbosch [18] a signalé la tendance à la succession alternée de maxima étroits et larges, et montré que la largeur d'un minimum est liée à la quantité de lumière émise pendant le maximum précédent.

Bien que U Geminorum soit une étoile de caractéristiques très voisines de celles de SS Cygni, son étude présente des difficultés particulières tenant au fait que l'étoile n'est pas observable pendant 2 ou 3 mois de l'année. Greep [19] a calculé la loi de distribution des intervalles séparant deux maxima consécutifs, et utilisé cette loi pour rétablir les maxima ayant périodiquement échappé à l'observation. Il a également calculé un certain nombre de corrélations entre divers éléments de la courbe de lumière.

L'étude la plus complète sur SS Cygni est sans conteste celle de Campbell [2] et Sterne et Campbell [3] portant sur les 267 premiers maxima. La première partie [2] contient essentiellement les données relatives à ceux-ci, et la définition des divers éléments caractérisant la courbe de lumière ; ces différents points ont été résumés dans la première partie de ce travail. La deuxième partie [3] renferme les résultats de l'exploitation statistique des données ; ceux-ci vont être maintenant examinés et comparés aux résultats que j'ai obtenus.

Discussion de l'étude de Sterne *et* Campbell.

Aux éléments utilisés dans la présente étude et définis antérieurement s'ajoutent les suivants, employés par Sterne et Campbell :

— amplitude d'un maximum : différence entre la magnitude d'un maximum et la magnitude moyenne des minima adjacents ;

— cycle : intervalle de temps séparant deux passages consécutifs de l'éclat à la magnitude 10,0, lors de la croissance de l'éclat.

1° *Distributions de fréquences.* — Les distributions de fréquences des largeurs de maxima, de

leurs magnitudes et de leurs types sont évidemment très semblables à celles relatives à la série des 437 maxima.

— Les amplitudes de maxima n'ont pu être calculées pour ceux postérieurs au 267me, car les magnitudes moyennes des minima n'ont plus été évaluées ; la distribution des amplitudes de maxima est d'ailleurs peu différente de celle de leurs magnitudes.

— Étudiant les cycles, les auteurs montrent que leur distribution peut être ajustée par une loi de Gauss. Cette conclusion appelle la remarque suivante :

— un cycle étant constitué d'un maximum et du minimum suivant, sa durée est donc la somme de deux grandeurs (largeur d'un maximum + largeur d'un minimum). Ces grandeurs doivent être subdivisées (M_L, M_E, m_{LL}, m_{EE}, m_A) et les variables ainsi mises en évidence sont stochastiquement indépendantes et suivent des lois de répartition différentes. La distribution des cycles selon une loi normale doit donc simplement être considérée comme une conséquence du théorème de Liapounoff (si $X_1, X_2 \ldots X_i \ldots X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, la loi de répartition de $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ tend sous certaines conditions, quand n augmente, vers la loi normale quelle que soit la forme des lois des divers X_i).

Ainsi, malgré l'apparence périodique de la courbe de lumière qui conduit logiquement à considérer le « cycle » comme une variable représentative d'un phénomène unique, cette variable traduit en réalité l'effet résultant de la combinaison de plusieurs phénomènes distincts. L'étude des cycles ne semble donc pas susceptible d'améliorer notre connaissance de ces phénomènes ; c'est pour cette raison que je n'ai pas considéré cette grandeur dans l'étude de SS Cygni.

Cette remarque sur la complexité du phénomène que recouvre la notion de « cycle » est sans doute valable pour toutes les étoiles variables du type de SS Cygni.

2° *Associations et corrélations.* — Chacun des éléments de la courbe de lumière a été divisé en 2 classes :

	Classe 1	Classe 2
	—	—
type des maxima	A	non-A
magnitude des maxima.....	$\leqslant$ 8,5 mag.	$>$ 8,5 mag.
largeur des maxima	$<$ 11,0 jours	$>$ 11,0 jours
largeur des minima	$<$ 39,0 jours	$>$ 39,0 jours
longueur des cycles	$<$ 50,0 jours	$\geqslant$ 50,0 jours

Associant 2 à 2 ces éléments, Sterne et Campbell ont calculé 19 rapports d'association (coefficient caractérisant la liaison de deux variables prenant chacune deux valeurs seulement, constituant donc un tableau de contingence 2 × 2), dont 14 sont significatifs d'une liaison. On remarquera que la répartition des maxima en 2 classes suivant la largeur ou la magnitude correspond sensiblement à la répartition en Max. E et Max. L ; de même, la classe 1 des minima rassemble la majorité des valeurs de m_{EE} et une partie de m_A, la classe 2 l'autre partie des m_A et la majorité des m_{LL}. La plupart des liaisons trouvées par ces auteurs traduisent donc simplement l'existence des distributions différentes des M_E, M_L, E_E, E_L, m_{EE}, m_A, m_{LL}, etc....

Sterne et Campbell ont en outre calculé les coefficients de 8 corrélations ; 5 d'entre elles portent sur la durée des cycles : leurs résultats s'interprètent aisément, compte-tenu des relationt trouvées entre les éléments des minima et des maxima. Deux autres traduisent respectivemens l'alternance de Max. E et Max. L et la liaison entre la largeur des maxima et leur amplitude. La dernière, calculée entre *amplitudes* de maxima successifs, conduit à une valeur du coefficient de corrélation hautement significative : $r = + 0{,}505$, résultat d'autant plus curieux que le rapport d'association entre *magnitudes* de maxima successifs a pour valeur — 3,0 : le fait de remplacer les magnitudes par les amplitudes inverse donc le sens de la liaison. On peut penser, avec les auteurs, que la corrélation entre amplitude de maxima est fortement influencée par la magnitude des minima, qui intervient dans la définition des amplitudes. Ne disposant pas des magnitudes des minima au delà du maximum n° 267, je n'ai pu approfondir ce point.

II. Études théoriques

Partant de la découverte récente de la duplicité de SS Cygni, Schatzman [20] a conçu une théorie du phénomène que l'on peut sommairement résumer ainsi : le mouvement orbital induit dans l'une des composantes de l'étoile double des oscillations forcées dont l'amplitude est maximum aux pôles et à l'équateur, et minimum entre les deux. Cette oscillation devient instable quand la concentration moyenne A [1] du produit explosif dans l'étoile dépasse une certaine valeur A_0. A partir de ce moment, l'amplitude de l'oscillation augmente linéairement avec le temps ; l'explosion se produit alors dans la région de l'étoile où l'amplitude atteint une valeur critique, fonction de la concentration en produit explosif.

« Pour simplifier le modèle, on suppose que la surface de l'étoile peut être divisée en deux régions, la région I et la région II, l'amplitude étant constante dans chacune des deux régions, mais différente dans la région I et la région II. »

« Après une explosion dans la région I se produit l'augmentation séculaire de la concentration dans les régions I et II. Lorsque la concentration moyenne critique est atteinte, l'instabilité apparaît. Mais l'amplitude critique est atteinte d'abord dans la région II où la concentration est plus grande que dans la région I : l'explosion se produit dans la région II. Après cette explosion dans la région II, l'augmentation séculaire de la concentration amène le retour de l'instabilité. Mais cette fois-ci, l'amplitude critique est atteinte d'abord dans la région I. D'où l'alternance des types d'explosions (Max. E et Max. L). » (Schatzman [21]).

Moyennant quelques hypothèses supplémentaires, cette théorie est susceptible de rendre compte de certaines caractéristiques de la courbe de lumière de SS Cygni mises en évidence par l'étude statistique.

La concentration moyenne A de l'étoile en produit explosif s'obtient en pondérant convenablement les concentrations α_1 et α_2 dans les régions I et II.

$$A = \Sigma_1.\alpha_1 + \Sigma_2.\alpha_2 \quad \text{avec} \quad \Sigma_1 + \Sigma_2 = 1.$$

Schatzman admet que α_1 et α_2, donc aussi A, croisent linéairement avec le temps. Il montre par ailleurs [21] que l'explosion ne se produit pas dès que A a atteint la valeur A_0 : un certain temps est nécessaire pour permettre à l'amplitude des oscillations, devenues alors instables, d'atteindre la valeur critique qui déclenche le mécanisme de l'explosion. Or, les amplitudes ξ_1 et ξ_2 des oscillations forcées induites dans les régions I et II sont différentes ; les amplitudes critiques ξ_{1c} et ξ_{2c} dépendent des concentrations critiques α_{1c} et α_{2c} également différentes. On peut admettre que le temps s'écoulant entre l'apparition de l'instabilité (quand $A = A_0$) et le déclenchement de l'explosion est systématiquement différent pour une explosion dans la région I ou la région II. Si A_{E1} et A_{E2} désignent les concentrations moyennes de l'étoile au moment de l'explosion dans la région I ou la région II on aura donc :

$$A_{E1} \neq A_{E2}.$$

Prenons pour fixer les idées :

$$A_{E1} > A_{E2}.$$

L'explosion dans la région I se déclenche quand la concentration dans cette région est $\alpha_{1E} > \alpha_{1c}$. Après l'explosion, cette concentration prend une valeur α_{1p} déterminée par la température de l'explosion. Négligeant en première approximation l'accroissement de α_2 pendant la durée de l'explosion dans la région I, la concentration moyenne de l'étoile à la fin de celle-ci sera :

$$A_{p1} = A_{E1} - \Sigma_1 (\alpha_{1E} - \alpha_{1p}).$$

De même, après une explosion dans la région II, la concentration moyenne de l'étoile sera :

$$A_{p2} = A_{E2} - \Sigma_2 (\alpha_{2E} - \alpha_{2p}).$$

On peut rendre compte des particularités de la courbe de lumière si l'on a :

$$A_{p1} < A_{p2},$$

ce qui entraîne, séparément ou simultanément :

$$\Sigma_1 > \Sigma_2,$$
$$\alpha_{1p} < \alpha_{2p}.$$

Sous ces hypothèses, on peut représenter graphiquement les variations de A en fonction du temps, de la façon suivante (fig. 24).

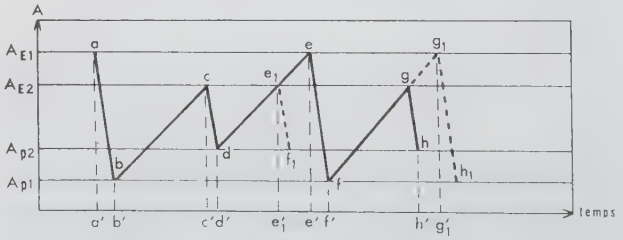


Fig. 24.

En *ab* se produit une explosion dans la région I : la concentration moyenne passe de A_{E1} à A_{p1}.

1. Concentration désignée par α dans le travail de Schatzman.

En *bc*, la concentration moyenne croît linéairement avec le temps : l'étoile est au minimum d'éclat.

En *cd* a lieu l'explosion dans la région II.

En *de*, croissance de la concentration moyenne ; l'étoile est au minimum d'éclat précédant l'explosion *ef* dans la région I.

Les valeurs de Σ_1, Σ_2, α_{1p}, α_{2p}, α_{1E}, α_{2E} n'ont aucune raison de rester constantes : les niveaux A_{E1}, A_{E2}, A_{p1}, A_{p2} varient donc dans le temps, entraînant les variations de la durée des maxima $a'b'$, $c'd'$, $e'f'$ ..., et des minima $b'c'$, $d'e'$ ....

Cependant, comme le signale SCHATZMAN, ce modèle n'explique pas entièrement les phénomènes observés, en particulier les séries d'explosions consécutives de même nature. Il faut admettre qu'en certains cas, pour des causes qui sont inconnues, l'augmentation de la concentration figurée en *de* ne se poursuit pas jusqu'au point *e* : atteignant le niveau A_{E2}, une explosion e_1f_1 se produit en région II, succédant ainsi à une explosion dans la même région ; de même, l'explosion g_1h_1 succèdera à *ef* dans la région I.

Si l'on veut bien admettre ce schéma, on voit qu'il rend compte des principales caractéristiques de la courbe de lumière :

— la nature d'un maximum (Max. E ou Max. L) qu'il est logique de supposer liée à la région affectée par l'explosion, est fixée par le niveau de la concentration moyenne au moment du début de l'explosion. Ce niveau dépend lui-même du niveau de concentration en fin de l'explosion précédente : le passage de A_{p1} à A_{E2}, ou de A_{p2} à A_{E1} n'a certes pas le caractère absolu d'une loi mathématique, mais se produit avec une fréquence excluant l'hypothèse de la seule intervention du hasard. Il est clair alors que la nature d'un maximum dépend, et dépend seulement, de la nature du maximum antérieur.

— on a fait l'hypothèse que les concentrations en produit explosif croissaient linéairement avec le temps suivant un taux constant : les pentes des segments *bc*, *de*, etc..., doivent donc être égales. Si l'on admet que les niveaux moyens A_{E1}, A_{E2}, A_{p1}, A_{p2} sont tels que :

$$A_{E1} - A_{E2} \# A_{p2} - A_{p1},$$

on doit avoir :

$$bc \# de,$$

ou

$$b'c' \# d'e'.$$

Or, les durées $b'c'$ et $d'e'$ sont inconnues : on mesure seulement la durée séparant les passages de l'éclat à la magnitude 10. Donc :

$$m_{LE} > b'c',$$
$$m_{EL} > d'e'.$$

Les erreurs commises sur $b'c'$ et $d'e'$ en les évaluant respectivement par m_{LE} et m_{EL} ont lieu dans le même sens, et sont approximativement du même ordre de grandeur. On doit donc avoir, en moyenne :

$$\overline{m_{LE}} = \overline{m_{EL}}.$$

On a effectivement montré que ces deux valeurs n'étaient pas significativement différentes.

— faisons l'hypothèse que l'explosion dans la région I (partie *ab* du graphique) correspond à un Max. L, l'explosion dans la région II (partie *cd*) à un Max. E. Deux Max. L consécutifs (*ef* et g_1h_1 par exemple) seront séparés par un minimum de durée $f'g_1'$, en moyenne supérieure à celle d'un minimum « normal » (c'est-à-dire compris entre deux maxima de natures différentes) ; de même, un minimum compris entre deux Max. E consécutifs sera d'une durée en moyenne inférieure à celle d'un minimum « normal ». On doit donc avoir :

$$\overline{d'e_1'} < \overline{b'c'} < \overline{f'g_1'},$$

d'où, compte-tenu de la remarque précédente sur l'approximation de ces grandeurs par les « largeurs » de minima au sens de CAMPBELL :

$$\overline{m_{EE}} < \overline{m_A} < \overline{m_{LL}},$$

c'est bien l'inégalité constaté lors de l'étude statistique des minima.

— on a admis que les pentes des segments *bc*, *de*, etc..., étaient égales. Il n'en est vraisemblablement pas de même des segments représentant les explosions *ab*, *cd*, etc... (ne serait-ce qu'en raison des valeurs différentes de Σ_1 et Σ_2). Si l'on fait cependant cette approximation, on devrait avoir (similitude des triangles cde_1 et efg_1), en raisonnant toujours sur des valeurs moyennes :

$$\frac{cd}{de_1} = \frac{ef}{fg_1},$$

ou, en projetant sur l'axe des abscisses :

$$\frac{c'd'}{d'e_1'} = \frac{e'f'}{f'g_1'}.$$

De même que pour les minima, les durées des maxima $c'd'$ et $e'f'$ sont estimées avec une erreur

systématique par M_E et M_L. On devrait donc avoir :

$$\frac{\overline{M_E}}{\overline{m_{EE}}} \neq \frac{\overline{M_L}}{\overline{m_{LL}}}.$$

Or :

$$\frac{\overline{M_E}}{\overline{m_{EE}}} = \frac{7{,}69}{27{,}5} = 0{,}28.$$

$$\frac{\overline{M_L}}{\overline{m_{LL}}} = \frac{15{,}14}{56{,}2} = 0{,}27.$$

L'accord entre ces deux valeurs apparaît excellent.

J'ai tenté simplement de raccorder quelques-uns des résultats de l'étude statistique à la théorie du phénomène. Ce travail est loin d'être complet : l'étude des variances des diverses grandeurs étudiées permettrait peut-être de définir les lois de variations des différents niveaux de concentration moyenne de l'étoile. Mais la validité du schéma proposé ne m'a semblé suffisamment justifiée pour entreprendre cette étude.

Je désire exprimer ma respectueuse reconnaissance à M. le Pr Dufay, qui m'a encouragé tout au long de ce travail, et a bien voulu mettre à ma disposition les bibliothèques des observatoires de Lyon et de Haute-Provence, ainsi qu'à M. le Pr Malecot, dont les conseils m'ont permis de surmonter les difficultés rencontrées dans le traitement statistique des données.

Je prie M. le Pr Schatzman de recevoir l'expression de ma gratitude pour la bienveillance et l'intérêt qu'il a bien voulu manifester à mon travail.

Je tiens à souligner la compréhension de M. Dupré-La-tour, Directeur Régional d'Électricité et Gaz de France à Lyon, grâce à qui la rédaction de ce travail a pu être menée à son terme dans les meilleurs délais.

Je remercie également M. Michel Petit, qui m'a fait profiter de ses connaissances des étoiles variables, et Mrs. Mayall, directrice de l'A. A. V. S. O., qui m'a communiqué avec diligence les données numériques indispensables.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Payne C., Gaposchkin and Gaposchkin G., 1938, Variable stars, *Harvard Observatory Monographs*, n° 5.
[2] Campbell L., 1934, *Harvard Annals*, **90**, n° 3.
[3] Sterne T. E. and Campbell L., 1934, *Harvard Annals*, **90**, n° 6.
[4] Grant G., 1955, *Ap. J.*, **122**, 566.
[5] *Harvard Reprint*, n° 231, 35.
[6] *Harvard Annals*, **104**, n° 8, 278 ; **107**, n° 1, 40.
[7] Kiveliovitch M. et Vialar J., 1957, Les séries chronologiques et la théorie du hasard, *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air*, n° NT 65 (Service de Documentation et d'Information Technique de l'Aéronautique).
[8] Kreiken E. A., 1955, *Communication de la, Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara*, série A, XVII, fasc. 1.
[9] Kreiken E. A. et Dilhan Egi, 1957, *M. N.* **117**, 72.
[10] Eddington A. S. et Plakidis S., 1929, *M. N.*, **90**, 65.
[11] Plakidis S., 1932, *M. N.*, **92**, 460.
[12] Plakidis S., 1933, *M. N.*, **93**, 373.
[13] Sterne T. E., 1934, *Harvard Circular*, n° 386.
[14] Sterne T. E., 1934, *Harvard Circular*, n° 387.
[15] Sterne T. E. and Campbell L., 1937, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **23**, 115 (ou : *Harvard Reprint*, n° 134).
[16] Stewart, *American Astronomical Society*, **8**, 224.
[17] Stewart and Panofsky, *American Astronomical Society*, **8**, 227.
[18] Kruytbosch W. E., 1928, *Bull. Astr. Inst. Netherlands*, **4**, n° 144, 143.
[19] Greep P., 1942, *De Lichtwisseling van U. Geminorum De U. Gem.-Sterren en de novae*, Thèse Utrecht.
[20] Schatzman E., 1958, *Ann. d'Astroph.*, **21**, 169.
[21] Schatzman E., 1959, *Ann. d'Astroph.*, **22**, 436.

ANNEXE I

Critique des données d'observation

I. Examen des maxima de magnitude supérieure a 9,0

Maxima 84 *et* 85 (fig. 1).

Les magnitudes des minima précédents sont comprises entre 11,5 et 12,0 : ces maxima seront donc considérés comme des « vrais » maxima.

Maxima 88 *et* 90 (fig. 2).

— Parmi les 4 observations faites au voisinage du maximum 88 une seule atteint 10,0 mag. Bien que le minimum précédent soit de l'ordre de 11,4 mag. il n'est pas possible de conserver ce maximum, dont la largeur devrait théoriquement être zéro. *Maximum supprimé.*

— Il serait tentant de supprimer également le maximum 90, car le minimum précédent est voisin de 11,0 mag. Cependant, 5 observations sont nettement inférieures à 10,0 mag. C'est essentiellement pour ce motif que l'on a conservé le maximum 90.

Maximum 147 (fig. 3).

Il est évident d'après la figure que le maximum 147 est un « vrai » maximum.

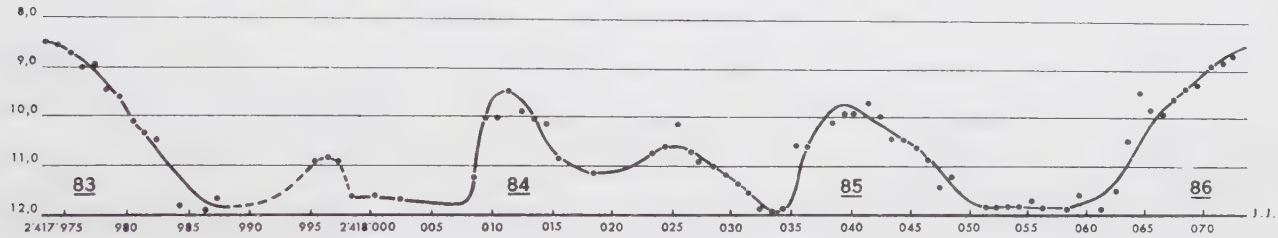


Fig. 1. — Maxima 84 et 85. Magnitudes respectives : 9,5 — 9,7.
Origine des données : Campbell [3] (moyennes journalières des observations).

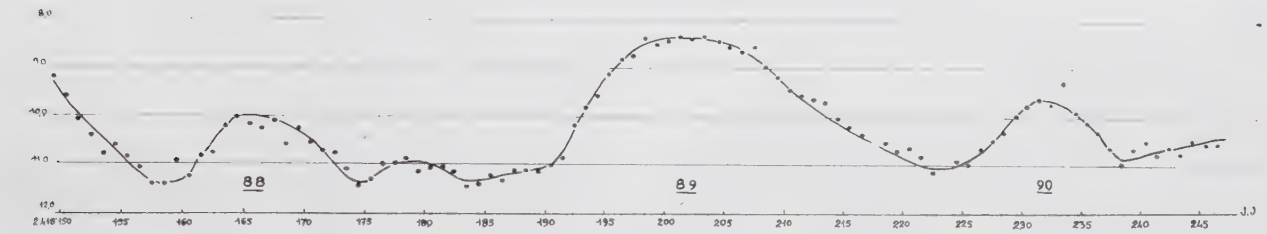


Fig. 2. — Maxima 88 et 90. Magnitudes respectives : 10,0 — 9,7.
Origine des données : Campbell [3] (moyennes journalières des observations).

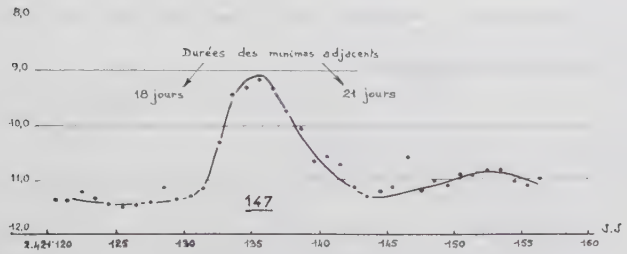


Fig. 3. — Maximum 147. Magnitude : 9,1. Origine des données : Campbell [3] (moyennes journalières des observations).

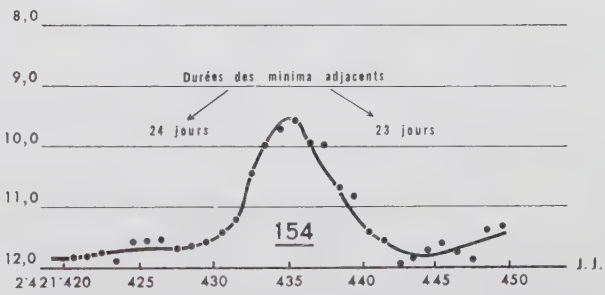


Fig. 4. — Maximum 154. Magnitude : 9,5. Origine des données : Campbell [3] (moyennes journalières des observations).

Maximum 154 (fig. 4).

Il est évident d'après la figure que le maximum 154 est un « vrai » maximum.

Maximum 170 (fig. 5).

La magnitude du minimum précédent est voisine de 11,3 ; 6 observations du maximum 170 sont inférieures à 10,0 mag. : il sera considéré comme un « vrai » maximum.

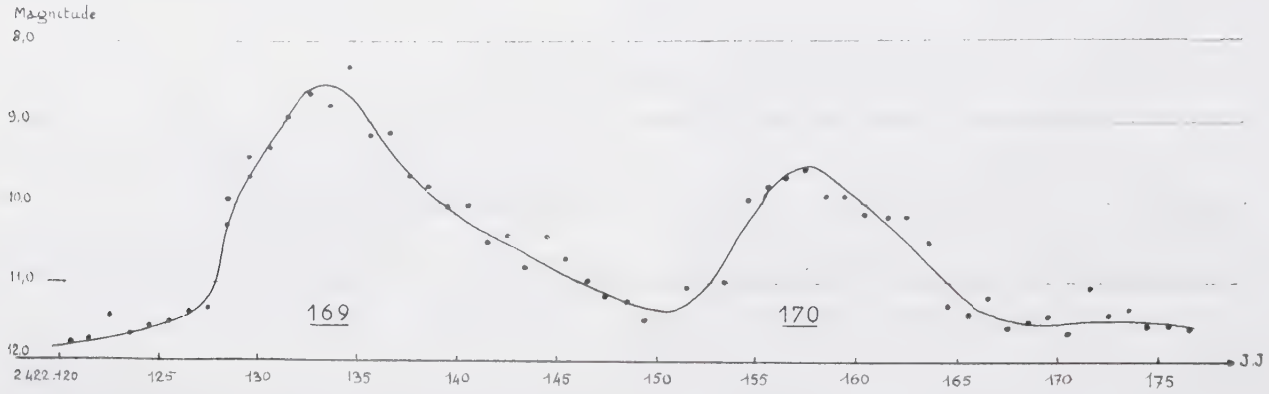


FIG. 5. — Maximum 170. Magnitude : 9,6. Origine des données: CAMPBELL [3] (moyennes journalières des observations).

Maximum 199 (fig. 6).

Il est évident d'après la figure que le maximum 199 est un « vrai » maximum.

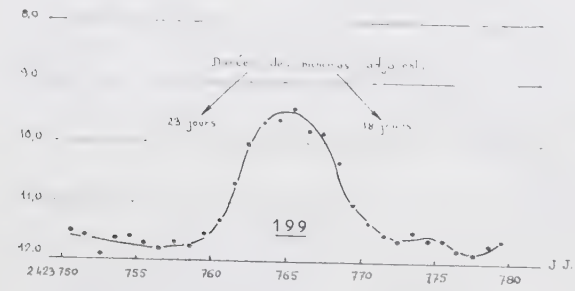


FIG. 6. — Maximum 199. Magnitude : 9,5. Origine des données : CAMPBELL [3] (moyennes journalières des observations).

Maxima 251, 252, 253 (fig. 7).

Ces 3 maxima sont manifestement de « vrais » maxima, principalement en raison de la magnitude élevée des minima précédents.

Maxima 268 *et* 269 (fig. 8).

CAMPBELL indique : « ces deux maxima ont été provisoirement considérés comme deux maxima séparés du type C1, bien qu'on ait pu les considérer comme un maximum unique du type C 5, présentant un creux bien marqué en son centre ».

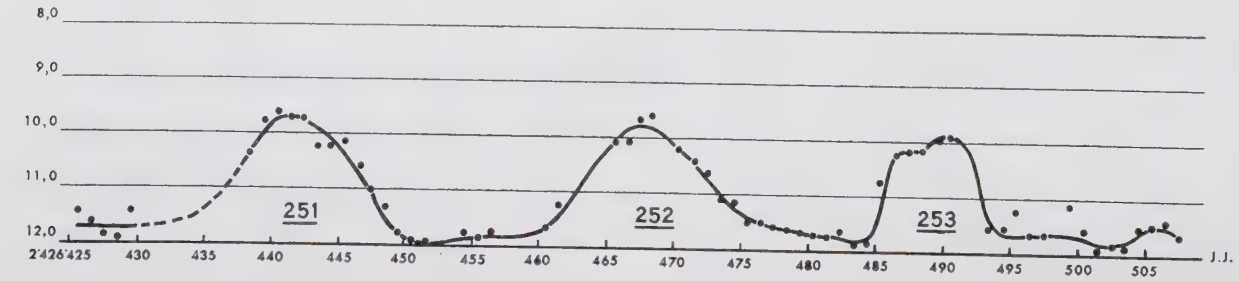


FIG. 7. — Maxima 251-252-253. Magnitudes respectives : 9,7-9,8-9,8.
Origine des données : CAMPBELL [3] (moyennes journalières des observations).

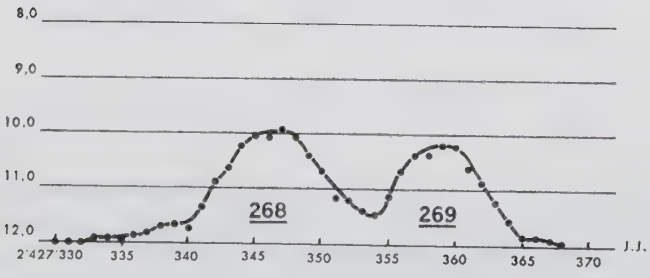


FIG. 8. — Maxima 268 et 269. Magnitudes respectives : 9,9-10,2. Origine des données : H. C. n° 395 (moyennes journalières des observations).

Le deuxième maximum semble bien correspondre à un sursaut secondaire de l'étoile, alors que le premier maximum, bien que voisin de la mag. 10,0, suit un minimum de 34 jours, dont l'éclat descend à 12,0 mag. J'ai donc conservé le maximum 268 et supprimé le maximum 269 ; pour ce dernier, on ne pourrait de toute façon définir une largeur, puisqu'il n'atteint pas la magnitude 10,0.

Maxima 271 *et* 272 (fig. 9).

Il est manifeste que ces deux maxima sont de « vrais » maxima.

Maximum 284.

Par suite d'une erreur typographique, H. C. 427 indique page 9 pour la largeur de ce maximum, la valeur erronée de 20 jours ; un pointage des observations journalières a permis de rectifier celle-ci, dont la valeur exacte est de 10 jours.

Maximum 288 (fig. 10).

Magnitude indiquée par CAMPBELL (H. C.-427) : 10,0.

La dispersion des points situés entre les maxima 287 et 288 traduit soit une activité désordonnée de l'étoile, soit le peu de précision des observations.

La courbe de lumière tracée au milieu du nuage de points par CAMPBELL ne semble pas tenir compte de la totalité des observations. Celle-ci a été rectifiée (tracé en pointillé sur la figure 10), d'où les valeurs finalement retenues :

— magnitude : 9,8,
— largeur : 2 jours.

Ce maximum a été considéré comme un « vrai » maximum.

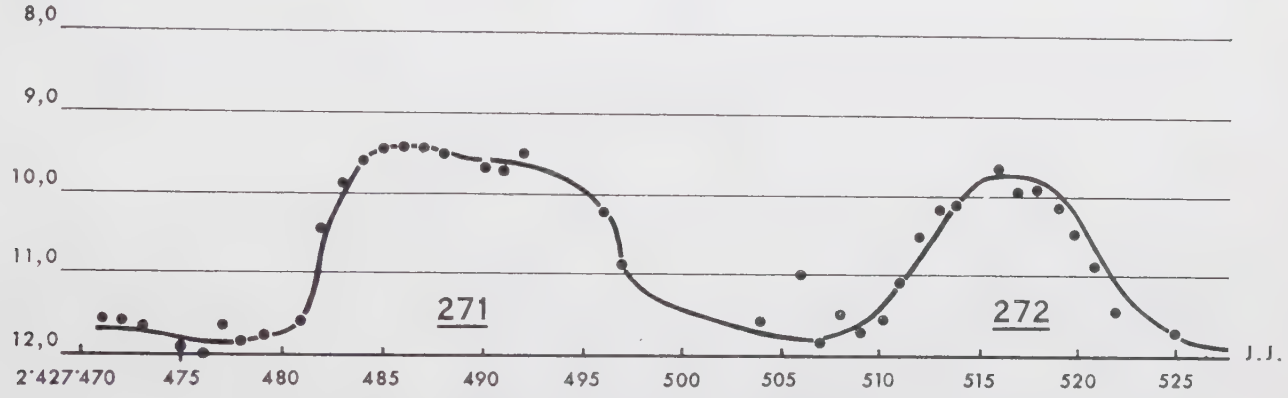


FIG. 9. — Maxima 271 et 272. Magnitudes respectives : 9,4-9,7.
Origine des données : H. C. n° 407 (moyennes journalières des observations).

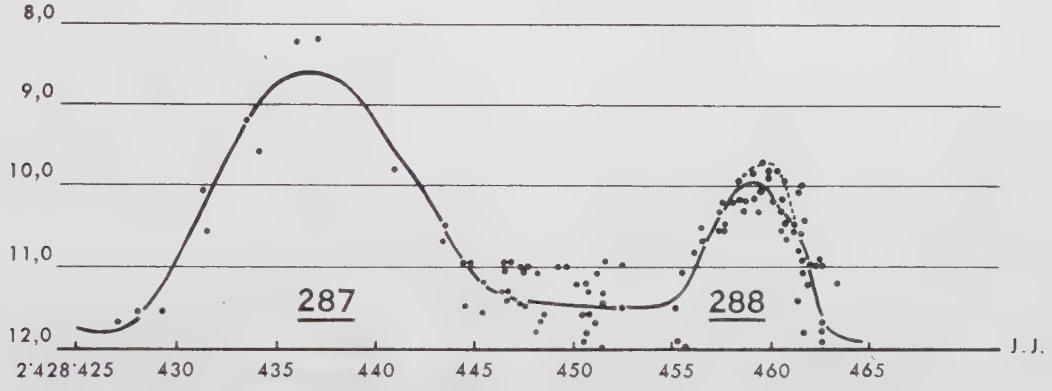


FIG. 10. — Maximum 288. Magnitude : 9,8. Origine des données : H. C. n° 427.

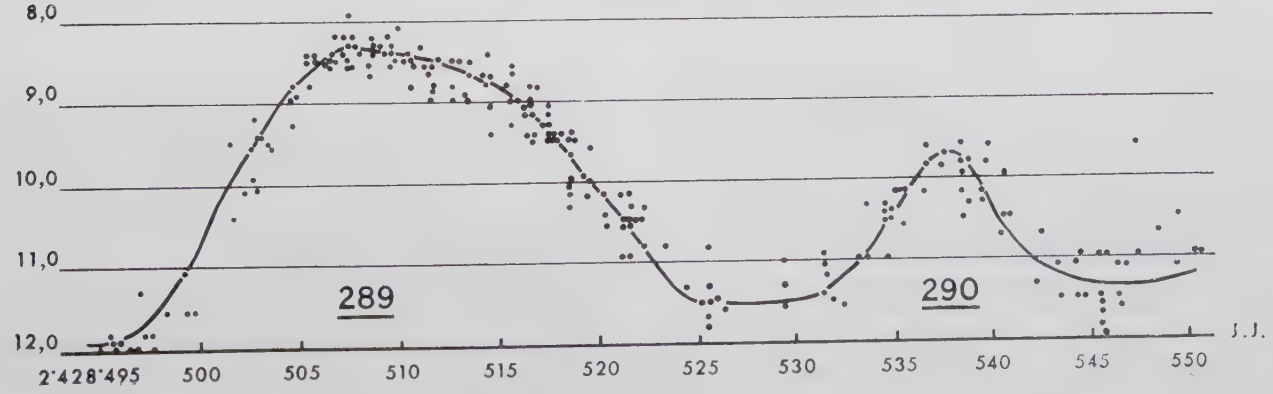


FIG. 11. — Maximum 290. Magnitude : 9,7. Origine des données : H. A. 104, 168, 201, 237.

Maximum 290 (fig. 11).

La magnitude moyenne au cours du minimum précédent est de l'ordre de 11,5 ; on considère donc le maximum 290 comme un « vrai » maximum.

On notera la dispersion considérable des observations.

Maximum 292 (fig. 12).

Ce maximum a été pointé en vue d'estimer sa

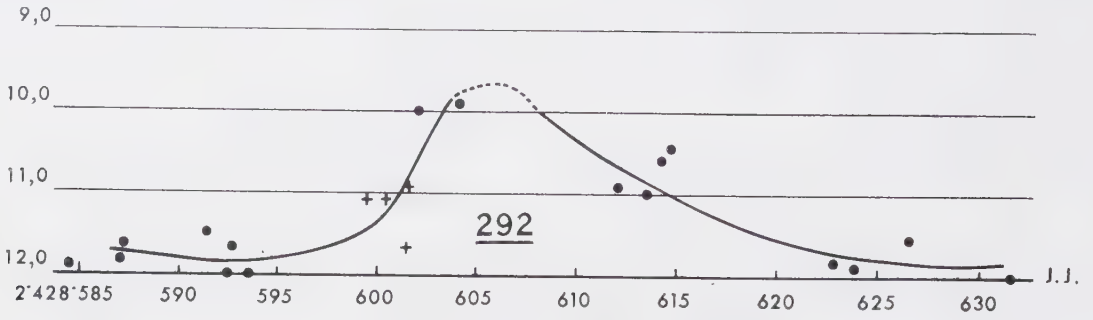


Fig. 12. — Maximum 292. Origine des données :
● H. A . **104**, 201, 238 + A. S. F. O. E. V., Lyon.

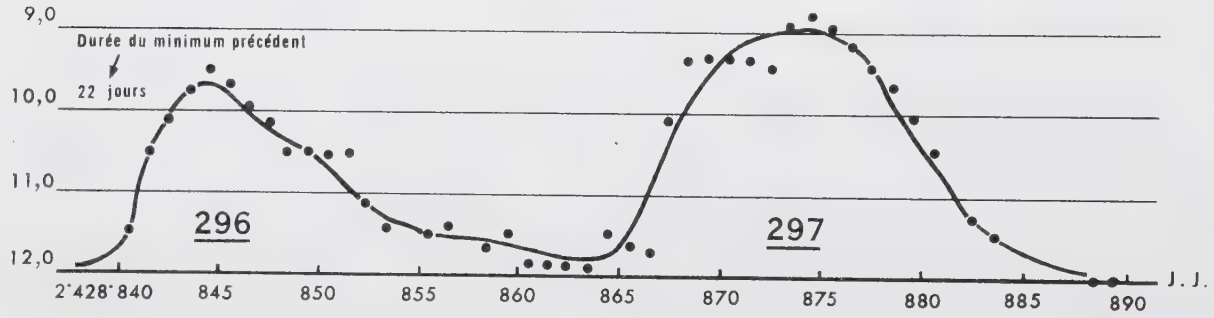


Fig. 13. — Maxima 296 et 297. Magnitudes respectives : 9,7-9,0. Origine des données : H. A. **107**, 41, 80.

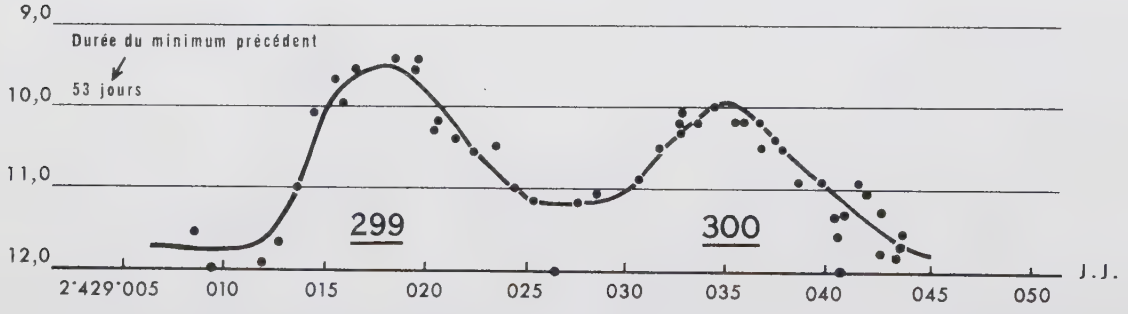


Fig. 14. — Maxima 299 et 300. Magnitudes respectives : 9,5-10,0. Origine des données : H. A. **107**, 80, 121.

magnitude. Le petit nombre d'observations n'en permet qu'une évaluation très approximative ; valeur retenue : 9,7. La largeur de ce maximum a été calculée par M. Mayall (communication privée).

Maxima 296 *et* 297 (fig. 13).

Il est évident d'après la figure que ces maxima sont de « vrais » maxima.

Maxima 299 *et* 300 (fig. 14).

Si le maximum 299 est sans conteste un « vrai » maximum, il faut par contre supprimer le maximum 300, dont la magnitude n'atteint 10,0 que dans une seule observation, et qui est séparé du précédent par un minimum peu marqué.

Maximum 351 (fig. 15).

Bien que le minimum entre les maxima 350 et 351 soit nettement marqué (magnitude moyenne comprise entre 11,8 et 12,0), il est bien difficile de retenir le maximum 351 : une seule observation est inférieure à la mag. 10,0, et l'on ne peut déterminer la largeur de celui-ci. Ce maximum a donc été supprimé.

Maxima 366 *et* 367 (fig. 16).

Il est bien difficile de décider si le max. 367 doit ou non être supprimé. En raison de la durée du minimum qui le précède (15 jours), ce maximum a finalement été conservé.

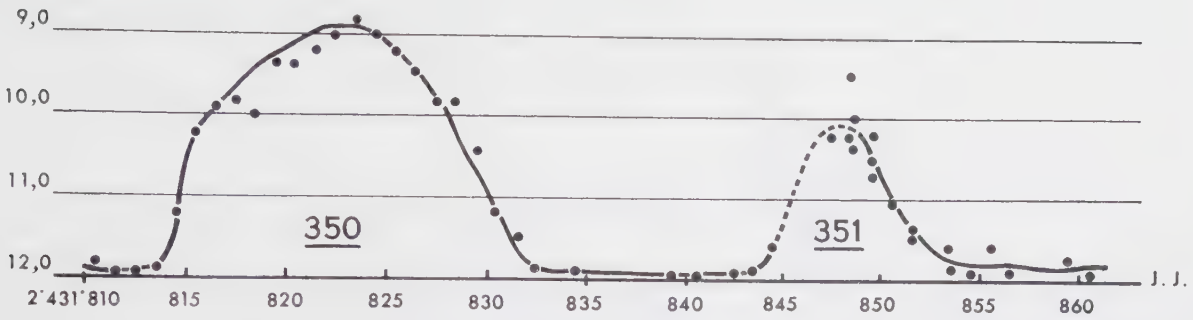


FIG. 15. — Maximum 351. Origine des données : H. A. **116**, 258.

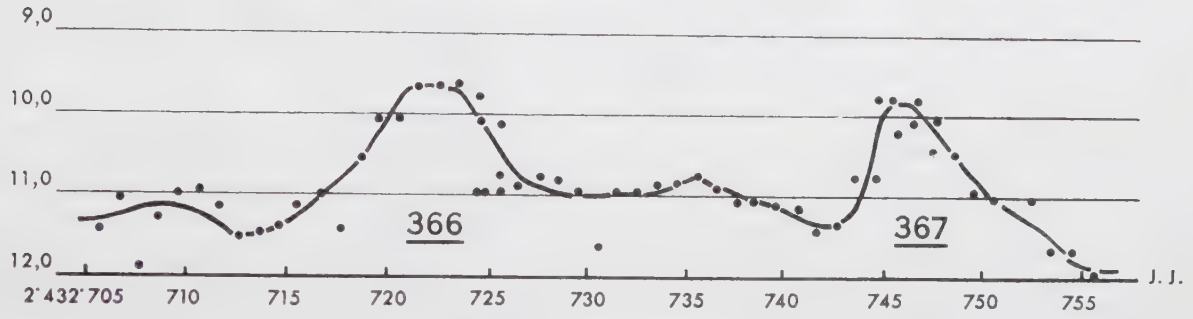


FIG. 16. — Maxima 366 et 367 ; Magnitudes respectives : 9,7-9,8.
Origine des données : Quaterly Report of A. A. V. S. O., n° 9.

***

Pour un certain nombre de maxima, le simple examen des observations montre que ceux-ci sont de « vrais » maxima, sans qu'il soit nécessaire de tracer la courbe de lumière. Ces maxima sont les suivants :

NUMÉRO	MAGNITUDE
—	—
52	9,0
280	9,0
303	9,3
317	9,1
336	9,8
357	9,7

Les magnitudes des maxima 313 à 345 n'ayant pas été calculées par l'A. A. V. S. O. les valeurs utilisées sont celles indiquées par ANHERT dans :

A. N. **271**- 20,
A. N. **276**-182.

II. RECONSTITUTION DES MAXIMA AYANT ÉCHAPPÉ A L'OBSERVATION

Maximum 319.

Ce maximum est le seul ayant totalement échappé aux observateurs de l'A. A. V. S. O. Toutefois, les observations des amateurs européens ont permis à ANHERT A. N. **276**-182 de construire la courbe de lumière de ce maximum ; mais les observations elles-mêmes n'ont pas été publiées, si bien que les éléments de ce maximum ont été lus directement — et de façon peu précise — sur la courbe de lumière tracée par ANHERT

— magnitude : 8,9
— largeur : 7 jours
— type : A 4.

Maximum 326 (fig. 17).

Les observations font totalement défaut sur la branche ascendante de la courbe de lumière. La figure 17 représente les deux tracés extrêmes de la courbe de lumière, compte-tenu des observations disponibles. On a retenu une valeur intermédiaire d'où les éléments finalement retenus :

— magnitude : 8,3
— largeur : 16 jours
— type : A 8.

Maximum 396 (fig. 18).

Aucune observation sur la branche ascendante n'a pu être retrouvée. Les valeurs retenues ne reposent donc sur aucune base sérieuse :

— magnitude : 8,6
— largeur : 9 jours
— type : indéterminé.

Maximum 404.

Pas d'observations sur la branche ascendante, autres que celles-ci (A. A. V. S. O. Quarterley Report 21).

JOUR JULIEN	MAGNITUDE
—	—
2 434 809	11,9
2 434 817	8,2

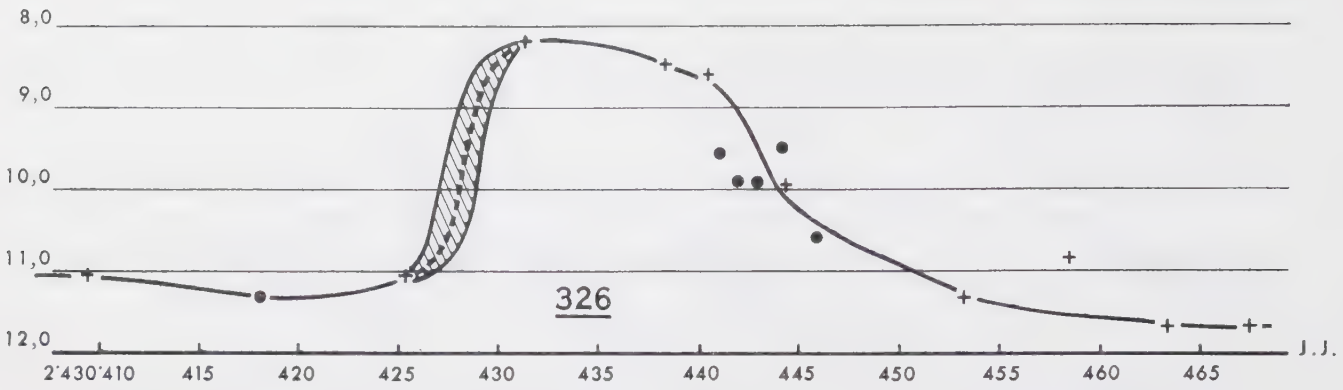


Fig. 17. — Maximum 326. Origine des données :
● H. R. 259, 20 + Publ. Medd. Copenhague Obs. n° 139, 12.

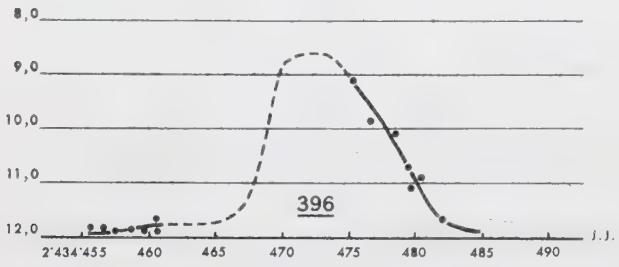


Fig. 18. — Maximum 396. Origine des données :
Quaterly Report of A. A. V. S. O., n° 20.

Par interpolation, on peut estimer le passage à la mag. 10,0 au J. J. 2 434 813, d'où une largeur de maximum de 15 jours ; la magnitude et le type ont été déterminés par l'A. A. V. S. O.

Maximum 435.

Observations sur la branche décroissante seulement. La valeur de 8 jours retenue pour la largeur de ce maximum ne repose donc sur aucune base sérieuse ; elle a été introduite uniquement pour éviter un alourdissement des calculs statistiques par suite d'une discontinuité dans la série des données. La magnitude et le type n'ont pu bien entendu être déterminés.

ANNEXE II

Tests du caractère aléatoire d'une série d'observations successives

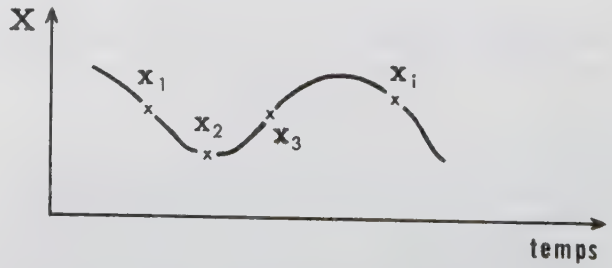
Considérons la série des valeurs numériques prises par une variable X associée à un certain phénomène. Abstraction faite de l'ordre dans lequel apparaissent ces valeurs, celles-ci permettent, par les méthodes classiques d'ajustement, de proposer une loi de distribution théorique représentant convenablement la distribution expérimentale de X.

Mais deux séries, identiques en leur composition, conduisant donc à la même loi théorique, peuvent différer dans l'ordre de succession des données : il est essentiel d'étudier si la série chronologique de ces valeurs est organisée ou fortuite ; en d'autre termes, de déterminer si chacune d'elles est indépendante ou non des autres valeurs de la série.

Kiveliovitch et Vialar [8] ont établi un certain nombre de « tests du hasard », destinés à déceler le caractère organisé d'une série chronologique, tests que j'ai utilisés dans l'étude des séries d'observations de SS Cygni. Les résultats essentiels établis par ces auteurs sont résumés ci-dessous.

***

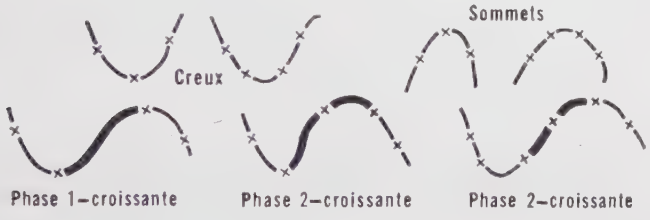
Soit une variable aléatoire continue X, prenant les valeurs numériques successives x_1, x_2, ... x_i .... La représentation graphique des valeurs successivement prises par X en fonction de leur ordre de succession dans le temps est une ligne continue.



On dira que la valeur x_i est un *sommet* S ou un *creux* C si elle est supérieure ou inférieure aux deux valeurs qui l'encadrent x_{i-1} et x_{i+1}. Plusieurs valeurs égales répondant à ces conditions ne sont comptées que pour un seul sommet ou creux. L'ensemble des sommets et creux constitue les *maxima* de la série.

Convenons de désigner par un 0 le passage d'une valeur de X à une valeur inférieure à la précédente, par un 1 le passage à une valeur supérieure à la précédente, par un — l'existence de deux valeurs successives égales. Un sommet correspondra ainsi au symbole 10, ou 1 — ... 0, un creux au symbole 01, ou 0 — ... 1.

Les parties ascendantes ou descendantes de la courbe représentative de la série constituent des *phases*. On appellera phase *d* — *croissante* toute configuration comportant *d* signes 1 ou — compris entre un — ou un 0, et un 0. De même, une phase *d* — *décroissante* correspondra à toute configuration comportant *d* signes 0 ou — compris entre un — ou un 1, et un 1. La figure ci-dessous donne quelques illustrations de ces définitions.



Nous utiliserons dans ce qui suit les notations suivantes :

N = nombre total de termes de la série ; on posera : $N' = N - 3$.

S = nombre de sommets.

C = nombre de creux.

M = S + C = nombre de maxima.

P = nombre total de phases. On a évidemment $P = M - 1$.

P_c = nombre de phases croissantes, P_d = nombre de phases décroissantes, $P = P_c + P_d$.

n_{1c}, n_{1d} = nombre de phases 1 — croissantes, 1 — décroissantes.

n_{2c}, n_{2d} = » 2 — croissantes, 2 — décroissantes.

n_{3c}, n_{3d} = » croissantes ou décroissantes d'ordre égal ou supérieur à 3.

n_1, n_2, n_3 = nombre de phases, d'ordre 1, 2, $\geqslant 3$. On a : $n_i = n_{ic} + n_{id}$.

Les tests indiqués ci-après ne sont valables que dans le cas d'une variable X continue. Ils peuvent être appliqués à une variable discrète moyennant quelques modifications que je n'ai pas jugé utile d'indiquer, car ce cas ne se présente pas dans l'étude de SS Cygni.

Test des maxima.

On définit la fréquence des maxima τ par l'expression : $\tau = \frac{M}{2(N-2)}$.

τ est une variable aléatoire dont on peut déterminer la loi de probabilité dans l'hypothèse d'une série chronologique purement aléatoire. On montre que, pour M assez grand, (approximation normale de la loi binomiale), τ est compris, avec une probabilité de 95 %, dans l'intervalle limité par les valeurs :

$$\tau_{min} = \frac{\frac{2}{3}N' + 1}{2(N' + 1 + 1{,}19\sqrt{N'})},$$

$$\tau_{max} = \frac{\frac{2}{3}N' + 1}{2(N' + 1 - 1{,}19\sqrt{N'})}.$$

Test des phases.

De la même façon, on détermine la loi de probabilité des nombres de phases n_{1c}, n_{2c} ... dans l'hypothèse d'une série purement aléatoire. Les intervalles de confiance à 95 % sont donnés par les expressions suivantes :

$$\frac{5}{24}N' - 0{,}559\sqrt{N'} \leqslant n_{1c} \leqslant \frac{5}{24}N' + 0{,}559\sqrt{N'},$$

$$\frac{11}{120}N' - 0{,}516\sqrt{N'} \leqslant n_{2c} \leqslant \frac{11}{120}N' + 0{,}516\sqrt{N'},$$

$$\frac{1}{30}N' - 0{,}346\sqrt{N'} \leqslant n_{3c} \leqslant \frac{1}{30}N' + 0{,}346\sqrt{N'}.$$

Les intervalles de confiance pour n_{1d}, n_{2d}, n_{3d} sont identiques aux précédents.

Les intervalles de confiance à 95 % de l'ensemble des phases sont donnés par les expressions suivantes :

$$\frac{5}{12}N' - 0{,}791\sqrt{N'} \leqslant n_1 \leqslant \frac{5}{12}N' + 0{,}791\sqrt{N'},$$

$$\frac{11}{60}N' - 0{,}729\sqrt{N'} \leqslant n_2 \leqslant \frac{11}{60}N' + 0{,}729\sqrt{N'},$$

$$\frac{1}{15}N' - 0{,}490\sqrt{N'} \leqslant n_3 \leqslant \frac{1}{15}N' + 0{,}490\sqrt{N'}.$$

Test des liaisons de phases.

Considérons 3 phases consécutives ; elles sont d'ordres respectifs i, j, k (i — croissante, j — décroissante, k — croissante). Dans l'hypothèse d'une série purement aléatoire, on a calculé la probabilité θ^c_{ijk} d'une telle succession de phases ; la valeur du nombre probable de suites de phases i, j, k est donc donné par $P_c.\theta^c_{ijk}$. L'intervalle de confiance à 95 % se déduit d'un schéma d'urne (loi binominale) et a pour limites :

$$P_c.\theta^c_{ijk} + 2\sqrt{\theta^c_{ijk}.(1 - \theta^c_{ijk})\,N}.$$

Si θ^d_{ijk} désigne la probabilité d'une suite de phases dont le premier terme est une phase i — décroissante, on a :

$$\theta^d_{ijk} = \theta^c_{ijk}.$$

Les formules établies sont donc valables pour les suites de phases commençant par une phase croissante ou décroissante.

L'expression donnant les limites de l'intervalle de confiance résulte de l'approximation normale de la loi binomiale ; elle n'est donc valable que pour une valeur de $P.\theta_{ijk}$ pas trop faible.

Test des croisements.

Les valeurs prises par X sont groupées en classes de valeurs centrales $x_1, x_2, \ldots x_i \ldots$ et ce sont ces valeurs qui conduisent au tracé de la courbe représentative de la série. Coupons cette courbe par des droites d'ordonnées $a_1, a_2 \ldots a_i$ comprises entre x_1 et x_2, x_2 et x_3, $\ldots$ x_i et $x_{i+1} \ldots$. Dans l'hypothèse d'une série purement aléatoire, la probabilité d'une intersection (ou croisement) de la droite d'ordonnée a_i avec la courbe a pour expression :

$$l_i = 2.\mathrm{F}(a_i).[1 - \mathrm{F}(a_i)],$$

où $\mathrm{F}(x)$ est la fonction de répartition de X.

Pour une série de N termes, le nombre probable de croisement est donc :

$$c_i = \mathrm{N}.l_i.$$

On établit que son intervalle de confiance à 95 % a pour limites :

$$\mathrm{N}.l_i \pm 2.\sqrt{\mathrm{N}.l_i\,(1 - l_i)}.$$

L'application de ces divers tests consiste à dénombrer les divers éléments utilisés (nombre de maxima, de phases, de croisements, etc...) et à vérifier si les valeurs trouvées sont comprises ou non à l'intérieur des intervalles de confiance.

On notera qu'aucun de ces tests n'exige la connaissance de la forme analytique de la fonction de répartition ou de distribution de la variable aléatoire étudiée.

Manuscrit reçu le 15 *avril* 1961.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

INTRODUCTION 1

PREMIÈRE PARTIE. — DONNÉES D'OBSERVATION 2
I. — Nature des données 2
II. — Origine des données 3
III. — Précision des observations. Critique des données 3

DEUXIÈME PARTIE. — ANALYSE STATISTIQUE DE LA COURBE DE LUMIÈRE 6
A) *Etude des maxima* 6
I. — Distribution des largeurs de maxima 6
II. — Relations entre maxima successifs 6
1° Relations concernant la nature des maxima 10
2° Relations concernant la largeur des maxima 10
III. — Magnitude et type des maxima 13
1° Distribution des magnitudes et des types 14
2° Relation entre magnitude, types et largeurs des maxima 14
B) *Etude des minima* 16
I. — Distribution des largeurs de minima 19
II. — Relations entre minima et maxima 19
1° Corrélation entre largeurs de minima et de maxima 22
2° Corrélations entre largeurs de minima consécutifs 22
C) *Recherche des organisations* 23
I. — Série des largeurs de minima 25
II. — Série des maxima 25
1° Largeurs des maxima 27
2° Types des maxima 27
3° Magnitudes des maxima 28
III. — Série des séquences de maxima de même nature 28

TROISIÈME PARTIE. — ÉTUDES ANTÉRIEURES 29
I. — Études statistiques 29
II. — Études théoriques 29

BIBLIOGRAPHIE 32

ANNEXE I. — CRITIQUE DES DONNÉES D'OBSERVATION 34

ANNEXE II. — TESTS DU CARACTÈRE ALÉATOIRE D'UNE SÉRIE CHRONOLOGIQUE 35

40

Imprimerie TAFFIN-LEFORT, à Lille (France). — *Published in France.*

DEUXIÉME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Mesure de la polarisation de la lumière en astrophysique

Vu :
LES MEMBRES DU JURY,
Signé : DUFAY, EYRAUD, MALECOT.

Vu et approuvé :
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
Signé : GAUTHIER.

Vu et accordé le permis d'imprimer :
Lyon, le 10 mai 1961.
LE RECTEUR,
PRÉSIDENT DU CONSEIL DE L'UNIVERSITÉ,
Signé : LOUIS.